Humboldt–Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität

Diplomarbeit (korrigierte Version)

Zufällige Graphen ohne einen kurzen Kreis

Michael Behrisch

Betreuung: Dr. Deryk Osthus, Prof. Dr. Anuschirawan Taraz

26. Juli 2002

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Ich bin damit einverstanden, dass die vorliegende Arbeit in der Bibliothek des Instituts für Informatik der Humboldt-Universität zu Berlin öffentlich ausgelegt wird.

Berlin, den 26. Juli 2002

Michael Behrisch

Vorwort

Die Theorie zufälliger Graphen hat trotz ihres relativ geringen Alters (der Beginn wird meist auf das Erscheinen der fundamentalen Serie von Arbeiten von Paul Erdős und Alfred Rényi um 1960 [5] datiert) bereits eine Fülle tief liegender Sätze und Erkenntnisse hervorgebracht. So gelang durch die hierin perfektionierten probabilistischen Methoden auch der Beweis einiger deterministischer Eigenschaften von Graphenklassen (als prominentestes Beispiel sei hier der Beweis der Existenz von Graphen mit beliebig großen kürzesten Kreisen bei gleichzeitig hoher Färbungszahl genannt), und es wurde das Verständnis für den „Durchschnittsgraphen“, der ja im Wesentlichen nur ein zufällig gewählter aus der Menge aller Graphen ist, sehr verbessert.

Eine der einfachsten Fragen, die man nun an einen Graphen stellen kann, ist, ob er die Kopie eines anderen Graphen enthält. Zugleich ist diese Frage aber auch komplex genug, dass einige schwer wiegende Konsequenzen daraus erwachsen. So existiert etwa eine Charakterisierung planarer Graphen (Graphen, die sich kreuzungsfrei in der Ebene zeichnen lassen) nach dem Satz von Kuratowski nur durch das Verbieten bestimmter Subgraphen. Weiterhin basiert auch der endlich gefundene Beweis der berühmten Vier-Farben-Vermutung (jede Landkarte lässt sich mit nur vier Farben so färben, dass angrenzende Länder verschiedene Farben erhalten) wesentlich auf der Identifizierung bestimmter Subgraphen, die in allen den Karten entsprechenden Graphen auftauchen und auf die diese sich reduzieren lassen, um anschließend „nur noch“ den Beweis für diese Graphen führen zu müssen.

Im Rahmen der extremalen Graphentheorie und der Ramseytheorie wird zusätzlich nach Graphen gesucht, die nur bedingt durch ihre Kantenzahl zwingend einen anderen Graphen enthalten bzw. bei denen jede Färbung der Knoten oder Kanten eine einfarbige Kopie des gesuchten Graphen erzeugt. Die Bestrebungen diese Theoriezweige mit den zufälligen Graphen zu verknüpfen sind in den letzten Jahren intensiviert worden und führten auch zu einigen erstaunlichen Resultaten. In den Vordergrund schob sich dabei eine sehr technisch aussehende Vermutung von Kohayakawa, Łuczak und Rödl [10], die auch im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht, die viele Sätze in diesem Zusammenhang als Korollare nach sich ziehen würde.

Da die Vermutung, wie auch die aus ihr resultierenden Aussagen, für kreisfreie Graphen sehr leicht zu beweisen sind, ist die erste wirkliche Herausforderung der Beweis der Vermutung für Kreise, wie er in der vorliegenden Arbeit durchgeführt wird. Dabei sind Vorleistungen insbesondere durch den Beweis einer abgeschwächten Version der Vermutung in [12], den Beweis für Dreiecke (Kreise der Länge 3) in [8] und ein entscheidendes

Lemma aus [16] erbracht worden.

Die vorliegende Arbeit hat vier Teile. Im ersten werden die für diese Arbeit wichtigen Grundlagen aus den behandelten Teilgebieten der Graphentheorie kurz eingeführt. Dabei handelt es sich um Ramsey-Theorie, extremale Graphentheorie und die Theorie zufälliger Graphen. Die wesentlichen Sätze werden in diesem Abschnitt nur zitiert und (bis auf wenige Ausnahmen) nicht bewiesen.

Der zweite Teil führt in die konkrete Thematik der vorliegenden Arbeit in, indem ausführlich begründet wird, wie die hier teilweise bewiesene Vermutung zu Stande kam, aber auch, welche Konsequenzen sowohl aus einem teilweisen als auch aus einem vollständigen Beweis dieser Vermutung gezogen werden können (bzw. könnten).

Der dritte Teil widmet sich dem Beweis des so genannten „Key Counting Lemmas" für Kreise, und im vierten Teil werden einige einfache Korollare, die Verallgemeinerungen des Ergebnisses auf andere Graphen zulassen, bewiesen sowie Ansatzpunkte im Beweis (oder auch außerhalb) gesucht, die zu einem vollständigen Beweis der Vermutung führen könnten.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Grundlegende Definitionen

In diesem Abschnitt werden alle benötigten Definitionen aus dem Bereich der Graphentheorie noch einmal zusammengetragen, um sicherzustellen, dass die Bedeutung der verwendeten Termini immer klar ist. Die Notation lehnt sich dabei im Wesentlichen an das Buch von Janson, Łuczak, Ruciński [8] an.

Definition 1.1. *Zu einer Menge M bezeichne $\binom{M}{2}$ die Menge der zweielementigen Teilmengen von M. Außerdem sei $[n] := \{1, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$.*

Definition 1.2. *Ein (endlicher, ungerichteter) Graph G ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V eine endliche Menge mit $v_G := |V|$ die* Knoten *des Graphen bildet und $E \subseteq \binom{V}{2}$ mit $e_G := |E|$ die* Kanten *darstellt. Weiterhin sei $\rho_G := e_G / \binom{v_G}{2}$ die* relative Dichte. *Außerdem sei zu einem Knoten $x \in V$ die* Nachbarschaft $\Gamma(x) := \{y | \{x, y\} \in E\}$ *und für $U \subseteq V$ sei $\Gamma(U) := \bigcup_{x \in U} \Gamma(x) \setminus U$.*

Definition 1.3. *Ein* Pfad *ist eine Menge von Kanten $\{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_k, y_k\}$, wobei die x_i und die y_i jeweils paarweise verschieden sind und $y_i = x_{i+1}$ für alle $1 \leq i < k$ und $y_k \neq x_1$. Man schreibt für einen beliebigen Pfad auch P_k, wobei k die* Länge des Pfades *ist.*

Ein Graph, der zu je zwei Knoten einen Pfad enthält, der diese verbindet, heißt zusammenhängend.

Ein Kreis *ist eine Menge von Kanten $\{x_1, y_1\}, \ldots \{x_k, y_k\}$, wobei die x_i und die y_i jeweils paarweise verschieden sind und $y_i = x_{i+1}$ für alle $1 \leq i < k$, jedoch $y_k = x_1$. Als Abkürzung verwendet man hier C_k.*

Ein Graph, der keinen solchen Kreis enthält, heißt Wald, *ist er außerdem zusammenhängend, heißt er* Baum.

Ein vollständiger Graph auf k Knoten (kurz K_k) ist ein Graph mit allen Kanten, also $E = \binom{V}{2}$.

Definition 1.4. *Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen* isomorph, *wenn es eine Bijektion $b : V \to V'$ gibt, so dass $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{b(x), b(y)\} \in E'$. Man spricht auch davon, dass G' eine* Kopie von G *ist.*

Ein Subgraph $H = (U, F)$ *eines Graphen G (in Zeichen: $H \subseteq G$) ist ein Graph mit $U \subseteq V$ und $F \subseteq E \cap \binom{U}{2}$. Bei $F = E \cap \binom{U}{2}$ heißt der Subgraph* induziert *und bei $U = V$ heißt er* (auf-)spannend. *Unter Missbrauch dieser Notation spricht man häufig* *auch dann davon, dass H in G enthalten ist, wenn G einen zu H isomorphen Subgraph enthält.*

Unter dem Komplement $\bar{G} = (V, \bar{E})$ eines Graphen G versteht man einen Graphen auf der gleichen Knotenmenge wie G mit $\{x, y\} \in \bar{E} \Leftrightarrow \{x, y\} \notin E$.

Für die Betrachtung zufälliger Graphen ist es manchmal nützlich, das allgemeine Konzept einer Grapheneigenschaft zur Verfügung zu haben:

Definition 1.5. *Eine* Grapheneigenschaft $\mathcal{A}$ *ist eine Teilmenge der Menge aller Graphen, die unter Isomorphie abgeschlossen ist, d.h., sie enthält zu jedem Graph auch alle zu ihm isomorphen Graphen.*

$\mathcal{A}$ *heißt* monoton fallend, *falls mit einem Graphen $G \in \mathcal{A}$ auch für alle seine Subgraphen $H \subseteq G$ gilt: $H \in \mathcal{A}$. Haben alle Graphen F mit $G \subseteq F$ die Eigenschaft $\mathcal{A}$ so heißt $\mathcal{A}$* monoton steigend. *Hat $\mathcal{A}$ eine dieser beiden Eigenschaften, und es nicht wichtig, welche von beiden, nennt man $\mathcal{A}$ einfach* monoton.

Die Abschnitte 1.2 und 2.3, die sich mit Ramseytheorie beschäftigen, benötigen das Konzept der Färbung eines Graphen (d.h. seiner Knoten bzw. Kanten), dass deshalb hier nochmal kurz eingeführt wird.

Definition 1.6. *Zu einem Graphen $G = (V, E)$ heißt $c : V \to \mathbb{N}$ eine* Knotenfärbung. *Diese nennt man* gültig, *wenn $c(x) \neq c(y)$ für alle $\{x, y\} \in E$. Die kleinste Zahl $\chi(G)$, so dass eine gültige Knotenfärbung mit χ Farben existiert, heißt* chromatische Zahl von G. *Ein Graph, der eine gültige Färbung mit zwei Farben besitzt, heißt* bipartit.

Der (bis auf Isomorphie) eindeutige vollständige bipartite Graph, dessen eine Klasse k und dessen andere l Knoten enthält, wird mit $K_{k,l}$ bezeichnet.

Entsprechend heißt $c : E \to \mathbb{N}$ eine Kantenfärbung. *Diese nennt man* gültig, *wenn $c(e) \neq c(f)$ für alle Kanten $e, f \in E$, die einen Knoten gemeinsam haben. Die kleinste Zahl χ', so dass eine gültige Kantenfärbung mit χ' Farben existiert, heißt* chromatischer Index von G.

Die folgende Eigenschaft von Graphen bezüglich bipartiter Subgraphen wird im Folgenden von Nutzen sein:

Proposition 1.7. *Jeder Graph G mit m Kanten enthält einen bipartiten Subgraph mit mindestens $\frac{m}{2}$ Kanten.*

Beweis. Man konstruiert den gesuchten Graphen schrittweise. Zu Beginn sei eine beliebige Partition der Knotenmenge (A, B) gegeben. Findet man nun in einer der Klassen einen Knoten, der in der eigenen Klasse mehr Nachbarn hat als in der anderen, so wird er in die andere verschoben. Dieses Verfahren wird wiederholt, bis es keinen solchen Knoten mehr gibt. Da jeder Schritt die Anzahl der Kanten zwischen den Klassen um mindestens eins erhöht, terminiert das Verfahren und da am Schluss jeder Knoten mehr Nachbarn in der Klasse hat zu der er nicht gehört als in seiner eigenen, ist auch die Schranke bezüglich m erfüllt. $\square$

Zum Verständnis eines Teils des Beweises in Abschnitt 3.3 ist auch die Kenntnis von Matchings unerlässlich, so dass diese hier kurz definiert werden sollen.

Definition 1.8. *Zu einem Graphen $G = (V, E)$ heißt $M \subseteq E$ ein* Matching, *wenn für alle $e, e' \in M$ mit $e \neq e'$ gilt $e \cap e' = \emptyset$. Die größte Zahl $\nu(G)$, so dass es ein Matching mit ν Kanten gibt, heißt Matchingzahl des Graphen.*

Der folgende hilfreiche Satz über Matchings in bipartiten Graphen lässt die Bestimmung der Matchingzahl nur über die Betrachtung der Expansion von Teilmengen der einen Partitionsmenge zu. Auch er wird im Beweis in Abschnitt 3.3 benötigt.

Satz 1.9 (Satz von Ore). *Für einen bipartiten Graphen G mit Bipartition (U, W) gilt:*

$$\nu(G) = |U| - \max_{S \subseteq U}\{|S| - |\Gamma(S)|\}.$$

1.2 Ramsey

Die Ramseytheorie beschäftigt sich mit der Frage, wann bestimmte Subgraphen in jeder Farbklasse einer Kanten- oder Knotenfärbung eines größeren Graphen auftauchen. Dabei schreibt man $G \to (H)_r^v$, wenn in jeder Färbung der Knoten von G mit maximal r Farben eine einfarbige Kopie von H in einer Farbklasse vorhanden ist. Für die Kantenversion schreibt man entsprechend $G \to (H)_r^e$. So gilt also zum Beispiel $K_3 \to (K_2)_2^v$, da offensichtlich jede Färbung der Knoten eines Dreiecks mit zwei Farben eine Kante mit zwei gleich gefärbten Endpunkten erzeugt.

Allgemein folgt aus dem so genannten Schubfachprinzip, dass es zu jedem Graph H und jeder Zahl von Farben r eine Zahl n gibt, so dass $K_n \to (H)_r^v$, denn irgendwann muss es eine Farbklasse mit mehr als v_H Knoten geben, und da K_n auch eingeschränkt auf diese Menge vollständig ist, enthält sie sicher H.

Eine der Leistungen Ramseys (der so genannte Satz von Ramsey [17]) besteht nun darin festzustellen, dass das Gleiche auch für Kanten gilt.

Satz 1.10. *Für alle Graphen H und alle Färbungszahlen $r \geq 1$ gibt es ein n, so dass $K_n \to (H)_r^e$.*

Ein Standardwerk über Ramseytheorie ist von Graham, Rothschild und Spencer [7].

1.3 Turán

Die extremale Graphentheorie (nach einem ihrer „Erfinder“ manchmal auch Turántheorie genannt) beschäftigt sich mit der Frage, wieviele Kanten ein Subgraph H eines gegebenen Graphen F haben kann, so dass H seinerseits wiederum einen anderen gegeben Graphen G nicht als Subgraph enthält. Kurz und formal bedeutet dies die Berechnung der Funktion

$$\mathrm{ex}(F, G) := \max\{e_H : G \not\subseteq H \subseteq F\}$$

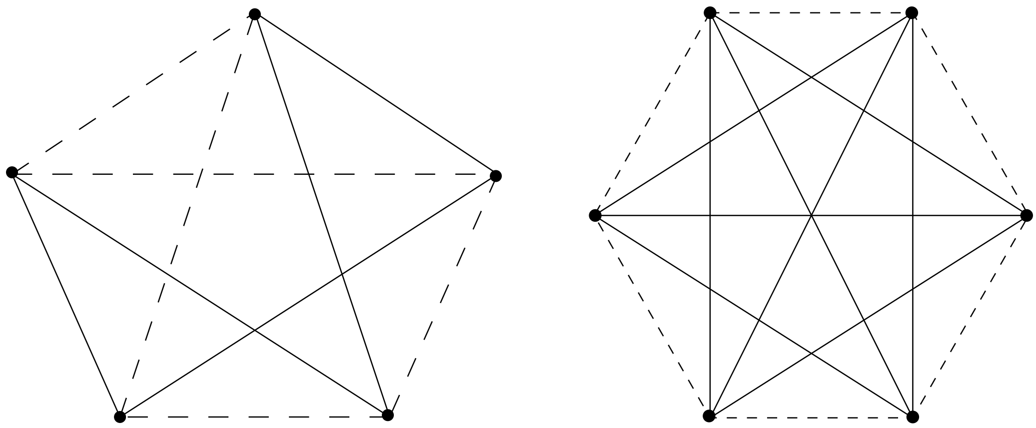

Abbildung 1.1: Eine Zweifärbung der Kanten des K_5 (ohne einfarbiges Dreieck) und eine des K_6

für beliebige F und G. Einen guten Überblick über diesen Zweig der Graphentheorie geben das Buch von Bollobás [1] und der Artikel von Simonovits [20].

Das erste fundamentale Resultat stammt von besagtem Turán [22]:

Satz 1.11. *Für alle l gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:*

$$\mathrm{ex}(K_n, K_{l+1}) \leq \left(1 - \frac{1}{l}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Dieser Satz wurde auf beliebige Graphen verallgemeinert durch Erdős und Stone (siehe [4]):

Satz 1.12. *Für alle Graphen H und alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:*

$$\mathrm{ex}(K_n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \varepsilon\right) \binom{n}{2}.$$

Ein weiterer wichtiger Satz aus diesem Bereich ist das so genannte Stabilitätstheorem (von Erdős und Simonovits, siehe z.B. [20]), welches eine Aussage über das Umformen von Graphen, die annähernd so viele Kanten wie ein extremaler Graph haben, in einen extremalen Graph macht:

Satz 1.13. *Für alle Graphen H und jedes $\delta > 0$ gibt es ein $\beta(\delta, H) > 0$, so dass jeder H-freie Graph G auf n Knoten mit mindestens $\left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \beta\right)\binom{n}{2}$ Kanten durch Entfernen von höchstens δn^2 Kanten $(\chi(H) - 1)$-partit wird.*

Im Prinzip sehen also die H-freien Graphen mit genügend vielen Kanten alle sehr ähnlich aus und zwar etwa wie in Abbildung 1.2.

Das Stabilitätstheorem besitzt auch noch ein interessantes Korollar.

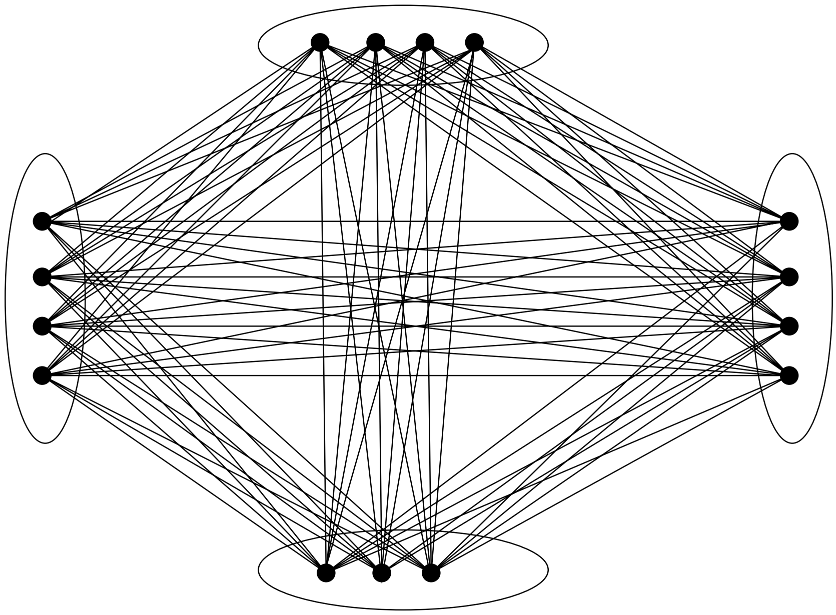

Abbildung 1.2: Ein extremaler Graph, der keinen Graph H mit $\chi(H) = 5$ enthält

Korollar 1.14. *Für jedes $\delta > 0$ und jedes $h \geq 3$ gibt es ein $\nu(\delta, h)$ und ein $n_0(\delta, h)$ so dass jeder Graph G mit $\chi(G) = h$ und $n \geq n_0$ Knoten sowie $m \geq \left(1 - \frac{1}{h-1} - \nu\right)\binom{n}{2}$ Kanten entweder νn^2 kantendisjunkte Kopien des K_h enthält oder durch Entfernen von höchstens δn^2 Kanten $(h-1)$-partit wird.*

Beweis. Sei $\nu = \frac{1}{4h^2} \min\{\delta, \beta(\frac{\delta}{2}, K_h)\}$, wobei β und n_0 wie in Satz 1.13 definiert seien. Sei weiterhin G so, wie im Korollar verlangt. Dann enthält G entweder νn^2 kantendisjunkte Kopien des K_h, oder man kann weniger als $\nu n^2 h^2$ Kanten aus G entfernen und erhält einen K_h-freien Graphen G' mit mindestens

$$\left(1 - \frac{1}{h-1} - \nu\right)\binom{n}{2} - \nu n^2 h^2 \geq \left(1 - \frac{1}{h-1} - \beta(\frac{\delta}{2}, K_h)\right)\binom{n}{2}$$

Kanten. Aus Satz 1.13 folgt, dass G' durch Entfernen von höchstens $\frac{\delta}{2} n^2$ Kanten $(h-1)$-partit wird, also wird G durch Entfernen von höchstens δn^2 Kanten $(h-1)$-partit. □

1.4 Abschätzungen

Im Folgenden werden einige häufig benötigte Abschätzungen für einfache kombinatorische Terme (etwa Fakultät oder Binomialkoeffizient) sowie für die Randbereiche von Wahrscheinlichkeitsverteilungen zusammengetragen.

Proposition 1.15. *Seien n und k natürliche Zahlen mit $n \geq k$ und x eine nicht negative reelle Zahl. Dann gelten folgende Ungleichungen:*

1.

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}^{-\frac{n}{12}}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \tag{1.1}$$

2.

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{\mathrm{e}n}{k}\right)^k \tag{1.2}$$

3.

$$1 - x \leq \mathrm{e}^{-x} \tag{1.3}$$

Beweis.

1. Dies ist eine Form der Stirlingschen Ungleichung, auf deren Beweis hier verzichtet wird.

2. Für die untere Schranke:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

   Für die obere Schranke:

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \overset{(1.1)}{\leq} \frac{n^k \mathrm{e}^k}{\sqrt{2\pi k}k^k} \leq \left(\frac{\mathrm{e}n}{k}\right)^k.$$

3. Sei $f(x) := 1 - x$ und $g(x) := \mathrm{e}^{-x}$. Wegen $f'(x) = -1$ und $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ ist klar, dass $f(0) = g(0)$ und $f'(0) = g'(0)$. Da für alle $x > 0$ gilt $f'(x) < g'(x)$, folgt mit einem entsprechenden Satz aus der Differentialrechnung das Behauptete.

□

1.4.1 Ungleichungen zur Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten

Aussagen über zufällige Graphen geben häufig die Grenzwahrscheinlichkeit für eine Eigenschaft der Graphen an, falls man ihre Knotenzahl gegen unendlich streben lässt. Demzufolge sind Abschätzungen über Wahrscheinlichkeitsverteilungen von grundlegender Bedeutung.

Lemma 1.16. *Sei X eine nicht negative Zufallsvariable, $\mu := \mathbb{E}[X]$. Dann gilt:*

1. *für alle $t > 0$*

$$\mathbb{P}[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t} \qquad \textit{(Markowsche Ungleichung).}$$

2. *Sei X außerdem die Summe unabhängiger Indikatorvariablen Y_i, so dass $X = \sum_{i=1}^{k} Y_i$, $Y_i \in \{0,1\}$ mit $\mathbb{P}[Y_i = 1] = p_i$. Dann gilt für beliebiges $\beta > 1$*

$$\mathbb{P}[X \geq \beta\mu] \leq \frac{\mathrm{e}^{\mu(\beta-1)}}{\beta^{\beta\mu}} \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{\beta}\right)^{\beta\mu}. \qquad \textit{(Tschernowsche Ungleichung I).}$$

und für $0 < \beta < 1$

$$\mathbb{P}[X \leq \beta\mu] \leq \mathrm{e}^{-\frac{(1-\beta)^2}{2}\mu} \qquad \textit{(Tschernowsche Ungleichung II).}$$

Beweis.

1.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{y} y \cdot \mathbb{P}[X = y] \geq \sum_{y \geq t} y \cdot \mathbb{P}[X = y] \geq t \cdot \sum_{y \geq t} \mathbb{P}[X = y] = t \cdot \mathbb{P}[X \geq t]$$

2. Zum Beweis von Ungleichung I gilt mit $t > 0$

$$\mathbb{P}[X \geq \beta\mu] = \mathbb{P}[\exp(tX) \geq \exp(t\beta\mu)].$$

Für Ungleichung II gilt mit $t < 0$ ebenso:

$$\mathbb{P}[X \leq \beta\mu] = \mathbb{P}[\exp(tX) \geq \exp(t\beta\mu)],$$

was nach der Markowschen Ungleichung (siehe 1) beschränkt ist durch:

$$\frac{\mathbb{E}[\exp(tX)]}{\exp(t\beta\mu)}$$

Aufgrund der Darstellung von X als Summe von Indikatorvariablen und deren Unabhängigkeit folgt:

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] = \mathbb{E}\left[\exp(t\sum_{i=1}^{k} Y_i)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} \exp(tY_i)\right] = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}[\exp(tY_i)].$$

Die Zufallsvariable $\exp(tY_i)$ nimmt mit Wahrscheinlichkeit p_i den Wert $\exp(t)$ und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_i$ den Wert $\exp(0) = 1$ an. Ihr Erwartungswert ist demzufolge:

$$\mathbb{E}[\exp(tY_i)] = p_i \exp(t) + (1 - p_i) = p_i(\mathrm{e}^t - 1) + 1 \leq \exp(p_i(\mathrm{e}^t - 1)),$$

da $x+1 \le \exp(x)$. Es gilt also:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \ge \beta\mu] &\le \frac{\prod_{i=1}^{k}\exp(p_i(\mathrm{e}^t-1))}{\exp(t\beta\mu)} = \frac{\exp(\sum_{i=1}^{k}p_i(\mathrm{e}^t-1))}{\exp(t\beta\mu)} \\ &= \frac{\exp(\mu(\mathrm{e}^t-1))}{\exp(t\beta\mu)}.\end{aligned}$$

Da die obige Ungleichung für beliebige t gilt, kann man dort $t = \ln\beta$ setzen und erhält in Ungleichung I (mit $\beta > 1$):

$$\mathbb{P}[X \ge \beta\mu] \le \frac{\mathrm{e}^{\mu(\beta-1)}}{\beta^{\beta\mu}} \le \left(\frac{\mathrm{e}}{\beta}\right)^{\beta\mu}.$$

Entsprechend ergibt sich in Ungleichung II (mit $\beta < 1$):

$$\mathbb{P}[X \le \beta\mu] \le \mathrm{e}^{(\beta-1-\beta\ln\beta)\mu} \le \mathrm{e}^{-\frac{(1-\beta)^2}{2}\mu}$$

□

Korollar 1.17. *Sei X eine Zufallsvariable mit hypergeometrischer Verteilung mit den Parametern N, m und n (das heißt, man wählt aus einer gegeben Menge der Größe N mit einer Trefferteilmenge der Größe m n Mal Elemente „ohne Zurücklegen“ und X zählt die Treffer) und $\mu := \mathbb{E}[X] = \frac{mn}{N}$. Dann gelten die Tschernow-Ungleichungen aus 1.16 mit $p := \frac{m}{N}$.*

Beweis. Sei X so wie in der Aussage des Korollars und $\bar{X}$ binomial verteilt mit $p := \frac{m}{N}$. Man rechnet leicht nach, dass für alle reellen t gilt

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tX}\right] \le \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{t\bar{X}}\right],$$

was mit der Rechnung wie im Beweis von Lemma 1.16 die Aussage beweist. □

1.5 Zufällige Graphen

Die Theorie zufälliger Graphen spielt heute eine wichtige Rolle sowohl in der Untersuchung ihrer Eigenschaften als einfache kombinatorische Objekte als auch in der so genannten average-case-analyse von Algorithmen, bei denen ein zufälliger Graph die „durchschnittliche“ Eingabe repräsentiert.

Die Standardreferenz zu diesem Thema ist immer noch das Buch von Bollobás, das gerade in einer zweiten Auflage [2] erschienen ist. Für neuere Ergebnisse auch und gerade im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit, steht ihm aber das Buch von Janson, Łuczak und Ruciński [8] in nichts nach.

Bei zufälligen Graphen steht meist das asymptotische Verhalten einer unendlichen Graphenfamilie (im einfachsten Falle aller Graphen) beim Streben der Knotenzahl gegen unendlich im Vordergrund. Häufig sind diese Graphen, wie der folgende Abschnitt zeigt, auch in einem Wahrscheinlichkeitsmodell „entstanden“, in welchem die Kantenwahrscheinlichkeit oder -anzahl von der Knotenzahl abhängt.

Deswegen wird, wenn im Folgenden von einem Subgraph konstanter Größe die Rede ist, immer auf einen Subgraph Bezug genommen, dessen Knotenzahl nicht von der Knoten- oder Kantenzahl seines Obergraphen abhängt.

1.5.1 Wahrscheinlichkeitsmodelle

Es gibt zwei wesentliche Wahrscheinlichkeitsmodelle zur Untersuchung dieser zufälligen Strukturen. Das erste ist das so genannte binomiale oder $G_{n,p}$-Modell. Dabei wird in einem leeren Graphen mit n Knoten für jedes Paar von Knoten mit Wahrscheinlichkeit p eine Kante erzeugt. Ein großer Vorteil dieses Modells ist, dass das Vorhandensein einer speziellen Kante unabhängig von der sonstigen Struktur des Graphen ist.

Das zweite wichtige Modell ist das so genannte uniforme oder $G_{n,m}$-Modell. Hier steht von vorne herein fest, dass es m Kanten im Graphen gibt, und für jede Kante werden die Endpunkte ausgewürfelt. Der entscheidende Vorteil hier ist, dass Kantenanzahl und damit auch Dichte des Graphen nicht zufällig sind.

Da für sehr große Graphen ($n \to \infty$), und solche sind in der Regel im Blickpunkt der Theorie, die Kantenanzahl im $G_{n,p}$-Modell nur wenig von ihren Erwartungswert $p\binom{n}{2}$ abweicht, ist es nicht verwunderlich, dass beide Modelle für $m = p\binom{n}{2}$ eng miteinander verwandt sind.

Dies wird im folgenden Lemma formalisiert, das zum Beispiel in [8] bewiesen wird:

Lemma 1.18. *Sei $\mathcal{A}$ eine monotone Grapheneigenschaft, c eine Konstante und seien m, n und p so, dass*

$$p\binom{n}{2} - cn\sqrt{p(1-p)} \leq m \leq p\binom{n}{2} + cn\sqrt{p(1-p)}$$

bzw.

$$\frac{m}{\binom{n}{2}} - c\sqrt{\frac{m\left(\binom{n}{2} - m\right)}{\binom{n}{2}^3}} \leq p \leq \frac{m}{\binom{n}{2}} + c\sqrt{\frac{m\left(\binom{n}{2} - m\right)}{\binom{n}{2}^3}}.$$

Sei weiterhin $0 \leq a \leq 1$.

Dann gilt:

$$\mathbb{P}\left[G_{n,m} \in \mathcal{A}\right] \xrightarrow{n\to\infty} a \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}\left[G_{n,p} \in \mathcal{A}\right] \xrightarrow{n\to\infty} a$$

Im folgenden wird noch ein kurzes Lemma bewiesen, dass etwas genauer über die Konvergenzgeschwindigkeit beim Übergang vom binomialen zum uniformen Modell Auskunft gibt.

Lemma 1.19. *Sei $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ zu gegebenem n und m gleichverteilt zufällig gewählt mit $p = \frac{4m}{\alpha\binom{n}{2}}$ für eine Konstante $0 < \alpha < 1$. Dann gilt: $\mathbb{P}\left[e(G) < m\right] \leq \alpha^{2m}$.*

Beweis. Die Anzahl der Kanten ist eine Zufallsvariable, die sich als Summe unabhängiger Indikatorvariablen darstellen lässt. Demzufolge kann man zur Abschätzung ihrer Abweichung vom Erwartungswert die Tschernow-Ungleichung (Lemma 1.16) benutzen. Da $\mathbb{E}[e_G] = p\binom{n}{2} = \frac{4m}{\alpha}$, gilt:

$$\mathbb{P}[e_G < m] = \mathbb{P}\left[e_G < \frac{\alpha}{4}\mathbb{E}[e_G]\right] \leq \mathrm{e}^{-\frac{(1-\frac{\alpha}{4})^2}{2}\frac{4m}{\alpha}} < \mathrm{e}^{\frac{-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{\alpha}2m} < \alpha^{2m}.$$

wobei die vorletzte Ungleichung wegen $\alpha < 1$ und die letzte wegen $\frac{-9}{16\alpha} < \ln\alpha$ gelten. □

1.5.2 Schwellenwertfunktionen

Der Grundstein der Theorie zufälliger Graphen wurde von Erdős und Rényi mit [5] gelegt. Diesem Artikel verdankt man auch die ersten grundlegende Resultate und die überraschende Erkenntnis, dass viele (Graphen-)Eigenschaften über so genannte Schwellenwertfunktionen verfügen.

Definition 1.20. *$G_{n,p}$ hat* fast sicher *die Eigenschaft $\mathcal{A}$, wenn*

$$\mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{A}] \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Eine Funktion $t(n)$ heißt Schwellenwertfunktion *für die Grapheneigenschaft $\mathcal{A}$, wenn*

$$\frac{p(n)}{t(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \;\Rightarrow\; \mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{A}] \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{(„0-Aussage“)}$$

$$\frac{p(n)}{t(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \;\Rightarrow\; \mathbb{P}[G_{n,p} \in \mathcal{A}] \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad \text{(„1-Aussage“)}$$

Später zeigten Bollobás und Thomason [3] sogar, dass jede monotone Grapheneigenschaft eine solche Schwellenwertfunktion besitzt.

1.5.3 Der Schwellenwert für Kreise

Eine erste wichtige Aussage über das Enthaltensein von Kreisen in zufälligen Graphen kann denn auch schon aus einem Resultat des eben erwähnten Erdős-Rényi-Artikels [5] gewonnen werden. Sie bewiesen den folgenden Satz:

Satz 1.21. *Sei H ein fester balancierter Graph, (d.h. $\frac{e_H}{v_H} \geq \max_{H' \subseteq H}\{\frac{e_{H'}}{v_{H'}}\}$. Dann ist*

$$t(n) = n^{-\frac{v_H}{e_H}}$$

Schwellenwertfunktion für die Eigenschaft H als Subgraph zu enthalten.

Daraus folgt unmittelbar, dass $t(n) = \frac{1}{n}$ die Schwellenwertfunktion für das Enthaltensein eines beliebigen Kreises fester Länge ist.

Nach den Äquivalenzbetrachtungen aus Lemma 1.18 folgt daraus auch, dass zufällige Graphen auf n Knoten, mit m Kanten für $\frac{m}{n} \to \infty$ fast sicher jeden Kreis fester Länge enthalten, während für $\frac{m}{n} \to 0$ fast sicher kein solcher Kreis enthalten ist.

exponentieller Abfall

Ist nun die genaue Wahrscheinlichkeitsverteilung gefragt, erkennt man jedoch einen entscheidenden Unterschied zwischen den beiden Wahrscheinlichkeitsmodellen. Wie aus dem Satz von Erdős und Stone 1.12 folgt, enthält jeder genügend große Graph ab einer gewissen Anzahl von Kanten jeden Graph als Subgraph, während im binomialen Modell selbst für eine Wahrscheinlichkeit nahe 1 immer eine gewisse Restwahrscheinlichkeit für das Nichtvorhandensein eines Subgraphen bleibt.

Die entsprechenden Resultate aus [8] lauten wie folgt:

Satz 1.22. *Sei H ein Graph mit mindestens einer Kante. Dann gibt es für jede Funktion $p(n)$ Konstanten c_1 und c_2, so dass:*

$$\exp\left(-c_1 \frac{n^{v_H} p^{e_H}}{1-p}\right) \leq \mathbb{P}[H \not\subseteq G_{n,p}] \leq \exp\left(-c_2 n^{v_H} p^{e_H}\right)$$

Satz 1.23. *Sei H ein nicht bipartiter Graph. Dann gibt es für jede Funktion $m(n)$ und jedes ε mit $m \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \varepsilon\right)\binom{n}{2}$ Konstanten c_1 und c_2, so dass:*

$$\exp\left(-c_1 n^{v_H-2} m^{e_H}\right) \leq \mathbb{P}\left[H \not\subseteq G_{n,m}\right] \leq \exp\left(-c_2 n^{v_H-2} m^{e_H}\right)$$

Wie man sieht, ist die genaue Wahrscheinlichkeitsverteilung im uniformen Modell für den bipartiten Fall noch unbekannt, jedoch gibt es dazu interessante Vermutungen, die in Abschnitt 2.5 dargelegt werden.

1.5.4 Graphen ohne einen bestimmten Subgraph

Nachdem die Evolution zufälliger Graphen (das heißt, das plötzliche Auftauchen bzw. Verschwinden von Eigenschaften des $G_{n,p}$ bei langsamer Erhöhung von p) im Allgemeinen gut verstanden war, wandte man sich allgemeineren Fragestellungen, wie etwa den Eigenschaften von Graphen, die gleichverteilt zufällig aus einer Menge dreiecksfreier Graphen mit einer festen Kantenzahl gewählt worden waren, zu.

Hier sind schon die vormals einfachen Fragestellungen, etwa nach einem brauchbaren Zufallsprozess, der solche Graphen (gleichverteilt) generiert oder nach der Anzahl solcher Graphen ungleich schwieriger. So ist zum Beispiel für die Anzahl der dreiecksfreien Graphen (laut [16]) bisher unter anderem folgende Abschätzung bekannt.

Satz 1.24. *Sei $\mathcal{T}_{n,m}$ die Menge der dreiecksfreien Graphen auf n Knoten mit m Kanten, wobei $m \geq \frac{\sqrt{3}}{4} n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\log n}$. Dann gilt:*

$$|\mathcal{T}_{n,m}| = (1 + o(1)) \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{n}{\sqrt{m}} \binom{n}{\frac{n}{2}} \binom{\frac{n^2}{4}}{m}.$$

Es tauchen auch interessante neue Effekte, wie etwa doppelte Schwellenwerte auf. So gibt es zum Beispiel einen Bereich in dem die Graphen in $\mathcal{T}_{n,m}$ fast sicher nicht bipartit sind, obwohl sie für $\frac{m}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ fast sicher bipartit sind (wie oben gezeigt wurde, enthalten sie dann überhaupt keine Kreise), während der Beweis des Satzes von Turán (Satz 1.11) zeigt, dass ein extremaler Graph ohne Dreieck (also $m = \frac{n^2}{4}$) auch bipartit ist.

Unter Verwendung des in dieser Arbeit bewiesenen Satzes 3.1 werden ähnliche Bipartitionsresultate in [16] gezeigt.

2 Die Bedeutung des Key Lemma

Es hat sich in den letzten Jahren herauskristallisiert, dass zum Beweis einiger wesentlicher Sätze in der Ramseytheorie, der Turántheorie und der allgemeinen Theorie zufälliger Graphen ein kleines Lemma sehr nützlich, wenn nicht sogar unerlässlich wäre.

Es handelt sich dabei um Vermutung 2.5, die zuerst in einer nicht probabilistischen (aber der vorliegenden äquivalenten) Version von Kohayakawa, Łuczak und Rödl [10] formuliert wurde. Wegen ihrer Bedeutung und ihrer Aussage über die Anzahl (respektive Wahrscheinlichkeit) von bestimmten (Sub-)Graphen bekam sie den Namen „Key Counting Conjecture“ oder optimistischer „Key Counting Lemma“.

2.1 Definitionen und Formulierung des Lemmas

In diesem Abschnitt wird das Key Counting Lemma formuliert und seine Konsequenzen in den Gebieten der extremalen und der Ramseytheorie zufälliger Graphen dargestellt.

Um die Vermutung überhaupt formulieren zu können, sind noch einige Definitionen nötig.

Definition 2.1. *Für einen Graphen $H = (V, E)$ seien $d_2(H) := \frac{e_H - 1}{v_H - 2}$ die* K_2-Dichte *von H und $m_2(H) := \max\{d_2(F) : F \subseteq H\}$ die* maximale K_2-Dichte *von H.*

Für zwei disjunkte Teilmengen $U, W \subseteq V$ bezeichnen

$$e_H(U, W) := |\{\{u, w\} \in E | u \in U \wedge w \in W\}|$$

die Zahl der Kanten zwischen U und W,

$$d_H(U, W) := \frac{e_H(U, W)}{|U||W|}$$

die Paardichte *und für ein $0 < s \leq 1$*

$$d_{s,H}(U, W) := \frac{e_H(U, W)}{s|U||W|}$$

die skalierte Paardichte *oder* $(s; H)$-Dichte *mit* Skalierungsfaktor s.

Ist H aus dem Kontext klar, schreibt man für $d_{\rho_H, H}(U, W)$ auch $\bar{d}(U, W)$.

Definition 2.2. *In einem Graph H bilden zwei disjunkte Teilmengen $U, W \subseteq V(H)$ ein $(s; H, \varepsilon)$-*reguläres Paar*, falls für jedes Paar von Teilmengen $U' \subseteq U, W' \subseteq W$ mit $|U'| \geq \varepsilon|U|, |W'| \geq \varepsilon|W|$ gilt:*

$$\left|d_{s,H}(U', W') - d_{s,H}(U, W)\right| \leq \varepsilon$$

*Sei weiterhin $\Pi = (V_0, \dots, V_k)$ eine Partition von $V(H)$. Diese heißt $(s; H, \varepsilon, k)$-*reguläre Partition*, falls für alle $i, j \geq 1$ gilt $|V_i| = |V_j|$ und außerdem $|V_0| \leq \varepsilon|V(H)|$ sowie höchstens $\varepsilon\binom{k}{2}$ Paare $(V_i, V_j)_{i<j}$ sind nicht $(s; H, \varepsilon)$-regulär. V_0 heißt (wegen der abweichenden Größe)* Ausnahmeklasse.

*Für $s = 1$ wird das s weggelassen, und es heißt nur noch (H, ε)-*reguläres Paar *bzw.* (H, ε, k)-reguläre Partition*. Für $s = \rho_H$ heißt es entsprechend* dünn (H, ε)-reguläres Paar *und* dünn (H, ε, k)-reguläre Partition*. Sind weiterhin H (und k) aus dem Kontext klar, wird auch nur vom dünn ε-regulären Paar oder der dünn ε-regulären Partition gesprochen.*

Außerdem heißt eine Partition $\Pi = (V_1, \dots V_k)$ ausgeglichen*, falls für alle $1 \leq i, j \leq k$ gilt: $|V_i| - |V_j| \leq 1$.*

Korollar 2.3. *Sei in einem Graph H für $s > 0$ ein Paar disjunkter Teilmengen $U, W \subseteq V(H)$ ein $(s; H, \varepsilon)$-reguläres Paar. Dann ist das Paar U, W auch für alle $s' \geq s$ $(s'; H, \varepsilon)$-regulär.*

Beweis.

$$\left|d_{s,H}(U', W') - d_{s,H}(U, W)\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|d_{s',H}(U', W') - d_{s',H}(U, W)\right| \leq \frac{s}{s'}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

□

Definition 2.4. *Zu einem gegebenen Graphen H mit $v := v_H$ sei $\mathcal{G}_{n,m}^H$ die Menge aller v-partiten Graphen, bei denen alle Partitionsklassen gleich groß sind ($|V_1| = \cdots = |V_v| = n$) und genau dann paarweise durch m Kanten verbunden werden, wenn die entsprechende Kante in H existiert. $\mathcal{G}_{n,m}^H$ heißt Menge der* Partitionsgraphen zu H *und ein zufälliger Repräsentant dieser Menge wird mit $G_{n,m}^H$ bezeichnet.*

Sei G ein Partitionsgraph zu H. G heißt dünn ε-regulär*, falls alle (oben definierten) durch Kanten verbundenen Paare (V_i, V_j) dünn (G, ε)-regulär sind.*

Jetzt ist es möglich, die Schlüsselvermutung (Key Conjecture) zu formulieren, allerdings geschieht dies hier nicht in der ursprünglichen Form, wie sie in [10] und [12] verwendet wird, sondern in der etwas „handlicheren“ aus [8] (dort ist es Conjecture 8.35) beziehungsweise [13].

Vermutung 2.5. *Für jeden Graphen H auf mindestens drei Knoten und jedes $\alpha > 0$ gibt es Konstanten $\varepsilon = \varepsilon(H, \alpha)$ und $c = c(H, \alpha)$, so dass für $m \geq cn^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$ gilt:*

$$\mathbb{P}\left[G_{n,m}^H \text{ enthält keine Kopie von } H \cap G_{n,m}^H \text{ ist dünn } \varepsilon\text{-regulär}\right] \leq \alpha^m.$$

Die Stärke dieser Vermutung wird erst in Verbindung mit einem weiteren Werkzeug der Graphentheorie sichtbar, um das es im nächsten Abschnitt geht.

2.2 Szemerédis Regularitätslemma

Szemerédi [21] bewies 1975, dass jeder große Graph eine Unterteilung seiner Knotenmenge in eine kleine Zahl fast gleich großer Teilmengen besitzt, so dass in den meisten bipartiten Subgraphen, die durch Paare von Teilmengen induziert werden, die Kanten gleichmäßig verteilt sind. Dieses Lemma spielt eine wichtige Rolle in der modernen Graphentheorie und in der Theorie zufälliger Strukturen. Problematisch ist nur, dass die Aussage des Lemmas zunächst nur für dichte Graphen sinnvoll ist, so dass hier eine Variante des Lemmas für dünne Graphen vorgestellt wird. Diese wurde erstmals von Kohayakawa [9] und Rödl bewiesen und stammt in der vorliegenden Form aus dem Artikel von Łuczak [13]. Da das ursprüngliche Lemma leider nicht so ohne Weiteres auf alle Graphen ausgedehnt werden kann, ist vorher noch die Definition einer speziellen Form von Beschränktheit eines Graphen nötig.

Definition 2.6. *Eine Funktion f heißt* positiv streng konvex, *falls $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ für alle $x > 0$ und für alle $0 < \xi < 1$ und $x_1 \neq x_2$ gilt:*

$$f(\xi x_1 + (1-\xi)x_2) < \xi f(x_1) + (1-\xi) f(x_2).$$

Ein Graph H heißt (f, L, b)-beschränkt *für eine positiv streng konvexe Funktion f sowie $b > 1$ und $L \geq 2$, falls für jede ausgeglichene Partition $\Pi = (V_1, \ldots, V_k)$ mit $2 \leq k \leq L$ von $V(H)$ gilt:*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i||V_j|}{\binom{|V|}{2}} f(\bar{d}(V_i, V_j)) \leq b$$

Man beachte, dass mit der obigen Definition jede positiv streng konvexe Funktion auch streng monoton steigend ist. Außerdem gilt folgendes Korollar für (f, L, b)-beschränkte Graphen:

Korollar 2.7. *Sei zu einer Konstanten d die Funktion $f(x) < x^d$ und Konstanten L und b und die Graphen G und H so gegeben, dass G ein (f, L, b)-beschränkter Graph und H ein spannender Subgraph von G ist.*

Dann ist H $(f, L, 2^d b)$-beschränkt.

Beweis. Sei $\Pi = (V_1, \ldots, V_k)$ die Partition für die

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i||V_j|}{\binom{|V|}{2}} f(d_{\rho_H, H}(V_i, V_j))$$

in H maximal wird.

Nach Proposition 1.7 ist $d_{\rho_H, H}(V_i, V_j) \leq 2 d_{\rho_G, G}(V_i, V_j)$, und somit gilt wegen $f(x) < x^d$ auch die Behauptung. □

Das folgende Lemma ist nun das Regularitätslemma, welches für beliebige (f, L, b)-beschränkte Graphen eine reguläre Partition liefert. Der Beweis findet sich in [13].

Lemma 2.8. *Sei f eine stetige, positiv streng konvexe Funktion und seien $\varepsilon > 0$, $b \geq 1$ gegeben. Dann gibt es ein $L = L(f, \varepsilon, b) > 0$ so dass es für jeden (f, L, b)-beschränkten Graphen H auf der Knotenmenge $V, |V| \geq L$ eine dünn (H, ε, k)-reguläre Partition von V für irgendein k mit $\frac{1}{\varepsilon} \leq k \leq L$ gibt.*

In dieser Allgemeinheit wird das Lemma im Folgenden jedoch nicht benötigt. Es reicht der Spezialfall $f(x) := x \ln\ln(x+100)$. Für diese Funktion gilt offenbar $f(0) = 0$. Da aus $f''(x) > 0$ die Konvexität von f folgt und wegen

$$\begin{aligned}(x \ln\ln(x+100))'' &= \frac{2}{(x+100)\ln(x+100)} - \frac{x(1+\ln(x+100))}{(x+100)^2\ln^2(x+100)} \\ &> \frac{2}{(x+100)\ln(x+100)} - \frac{3}{2}\frac{(x+100)\ln(x+100)}{(x+100)^2\ln^2(x+100)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(x+100)\ln(x+100)} > 0\end{aligned}$$

$f''(x) > 0$ für jedes $x > 0$ gilt, erfüllt f die gestellten Bedingungen.

2.2.1 Beschränktheit des $G_{n,m}$

Um das Lemma in voller Schönheit auf zufällige Graphen anwenden zu können, ist folgende Proposition recht nützlich, die garantiert, dass das Lemma für den $G_{n,m}$ praktisch immer Anwendung finden kann. In der vorliegenden Form stammt sie (inklusive des Beweises) aus [13], mit schlechteren Schranken und einer etwas anderen Definition der Beschränktheit war sie aber auch schon den Autoren der Vermutung bekannt.

Proposition 2.9. *Für alle $\alpha > 0$ gibt es ein $b(\alpha) > 0$ und ein $n_0(\alpha) > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ und $n \ln n \leq m \leq \frac{\alpha}{4}\binom{n}{2}$ gilt*

$$\mathbb{P}\left[G_{n,m} \text{ ist nicht } (f, 2\ln\ln n, b)\text{-beschränkt}\right] < \alpha^m.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt im binomialen Modell $(G_{n,p})$ mit $p := \frac{4m}{\alpha\binom{n}{2}}$, wobei nach Lemma 1.19, die Wahrscheinlichkeit, dass $G_{n,p}$ zu wenig Kanten hat kleiner als α^{2m} ist.

Weiterhin ist die Anzahl ausgeglichener Partitionen in maximal $2\ln\ln n$ Klassen beschränkt durch $(2\ln\ln n)^n \leq \alpha^{-m/4}$.

Für eine ausgeglichene Partition $\Pi = (V_1, \ldots, V_k)$ sei

$$Y = Y(\Pi) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i||V_j|}{\binom{|V|}{2}} f\left(\frac{e_{G_{n,p}}(V_i, V_j)}{|V_i||V_j|}\frac{\binom{n}{2}}{m}\right)$$

Da die Partitionsklassen alle fast gleich groß sind und die Anzahl der Kanten zwischen den verschiedenen Partitionsklassen durch jeweils unabhängige gleich (binomial) verteilte Zufallsvariablen X_i mit $i \in [\binom{k}{2}]$ dargestellt werden kann, ergibt sich (zusammen mit der Monotonie von f):

$$Y \leq \sum_{i=1}^{\binom{k}{2}} \frac{\left(\frac{n}{k}+1\right)^2}{\binom{n}{2}} f\left(\frac{X_i}{\left(\frac{n}{k}\right)^2} \frac{\binom{n}{2}}{m}\right) \leq \sum_{i=1}^{\binom{k}{2}} \frac{8}{k^2} f\left(X_i \frac{k^2}{m}\right).$$

Um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass für eine feste Partition Π in maximal $2 \ln \ln n$ Klassen die Zufallsvariable Y größer wird als ein geeignet gewähltes b, durch α^{2m} beschränkt ist.

Anstelle von Y berechnet man jedoch eine andere Zufallsvariable

$$\bar{Y}(b') := \sum_{i=1}^{\binom{k}{2}} \frac{4}{k^2} f\left(\frac{k^2}{m} \bar{X}_i(b')\right),$$

wobei $\bar{X}_1(b'), \ldots, \bar{X}_{\binom{k}{2}}(b')$ unabhängige Kopien der Zufallsvariable $\bar{X}(b')$ mit der Verteilung

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\bar{X}(b') = 0\right] &= \sum_{i \leq b'Np} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}, \\
\mathbb{P}\left[\bar{X}(b') = i\right] &= \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} && \text{für } b'Np < i \leq N
\end{aligned}$$

mit $N = \left(\frac{n}{k}\right)^2$ sind.

Da für n groß genug $Y \leq 4f(9b'/\alpha) + 2\bar{Y}(b')$ gilt, reicht es ein $b'(\alpha)$ und ein $b''(\alpha)$ zu finden, so dass

$$\mathbb{P}\left[\bar{Y}(b') \geq b''\right] \leq \alpha^{2m}$$

Offenbar gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{4m}{k^2} f\left(\frac{k^2}{m}\bar{X}(b')\right)\right)\right] &\leq 1 + \sum_{i > b'Np} \binom{N}{i} p^i \exp\left(\frac{4m}{k^2} \frac{ik^2}{m} \ln\ln\left(\frac{ik^2}{m} + 100\right)\right) \\
&\overset{(1.2)}{\leq} 1 + \sum_{i > b'Np} \left(\frac{\mathrm{e}Np}{i} \ln^4\left(\frac{ik^2}{m} + 100\right)\right)^i.
\end{aligned}$$

Für b' groß genug wird obige Summe kleiner als eins und damit folgt aus Markows Ungleichung (Lemma 1.16) mit $b'' \geq -3 \ln \alpha$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\bar{Y}b' \geq b''\right] &= \mathbb{P}\left[\mathrm{e}^{m\bar{Y}b'} \geq \mathrm{e}^{mb''}\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{4m}{k^2} f\left(\frac{k^2}{m}\bar{X}(b')\right)\right)\right]\right)^{\binom{k}{2}} \mathrm{e}^{-mb''} \\
&\leq 2^{k^2} \mathrm{e}^{-mb''} \leq 2^{(2\ln\ln n)^2} \alpha^{3m} \leq \alpha^{2m}
\end{aligned}$$

□

Damit ist die Anwendbarkeit des Regularitätslemmas 2.8 auf den $G_{n,m}$ in allen Fällen, wo die Anzahl der Partitionsklassen nicht von n abhängt gesichert, denn durch die Beschränkung bis $2 \ln \ln n$ wird bei genügend großem n jede Konstante übertroffen.

Das folgende Korollar (aus [13]) gibt noch Auskunft darüber, dass aus dem Regularitätslemma folgt, dass sich die Kanten auch in einem etwas anderen Sinne gut verteilen. So sind in dem durch eine kleine Teilmenge der Partitionsklassen induzierten Teilgraph von $G_{n,m}$ mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit auch nur ein kleiner Teil der Kanten enthalten.

Korollar 2.10. *Für jedes $\alpha > 0$ und $\delta > 0$ gibt es ein $\eta(\alpha, \delta) \leq \delta$ und ein $n_0 = n_0(\alpha, \delta)$, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Folgende für $G_{n,m}$ mit $n \geq n_0$ und $n \ln n \leq m \leq \frac{\alpha}{4}\binom{n}{2}$ nicht gilt, kleiner als α^m ist.*

Für jede ausgeglichene Partition $\Pi = (V_1, \ldots, V_k)$ mit $k \leq 2 \ln \ln n$ und jede Menge von Paaren $I \subseteq \{(i,j) : 1 \leq i < j \leq k\}$ mit $|I| \leq \eta\binom{k}{2}$ sind weniger als $\frac{\delta m}{2}$ der Paare $W_I = \{(v,w) : v \in V_i, w \in V_j, (i,j) \in I\}$ Kanten von $G_{n,m}$.

Beweis. Man kann annehmen, dass $I = \eta\binom{k}{2}$. Aus der Konvexität von f folgt, dass mit mehr als $\frac{\delta m}{2}$ Kanten in W_I:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i||V_j|}{\binom{|V|}{2}} f(\bar{d}(V_i, V_j)) \geq \frac{|W_I|}{\binom{n}{2}} f\left(\frac{\binom{n}{2}}{|W_I| m} \frac{\delta m}{2}\right) \geq \frac{\eta}{4} f\left(\frac{\delta}{2\eta}\right) \geq \frac{\delta}{100} \ln \ln \frac{\delta}{2\eta}.$$

Damit folgt die Behauptung mit $\eta = \frac{\delta}{2} \exp(-\exp \frac{100b}{\delta})$ wobei b so wie in Proposition 2.9 definiert sei. $\square$

Man beachte, dass im obigen Beweis eine nur monotone aber nicht konvexe Funktion f nicht ausreichen würde, da (z.B. bei $f(x) = x$) die Abhängigkeit von η nicht erhalten bliebe, welchselbige die Verletzung der Beschränktheitsbedingung und so den Widerspruchsbeweis ermöglicht.

2.2.2 Weitere Folgerungen für $G_{n,m}$

Bevor die entscheidenden Sätze formuliert und bewiesen werden, sind noch ein paar kleinere Lemmas über die Auswirkungen der Anwendungen der Vermutung 2.5 eventuell in Verbindung mit dem Reguläritätslemma nötig.

Eine wichtige Folgerung für zufällige Graphen, die im Prinzip die Formulierung der Vermutung überhaupt motiviert hat, ist die Folgende. Sie wird im Prinzip in allen nachfolgenden Sätzen, die auf der Vermutung 2.5 aufbauen, Verwendung finden, bzw. sogar an Stelle der Vermutung treten.

Lemma 2.11. *Sei H ein Graph für den Vermutung 2.5 gilt. Seien weiterhin c und ε so wie aus Vermutung 2.5 hervorgegangen. Dann gibt es Konstanten C und k, so dass für $m \geq Cn^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$, und alle $\frac{n}{k} \leq \bar{n} \leq n$ sowie $\bar{m} \geq c\bar{n}^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$ gilt:*

Falls $G_{n,m}$ einen dünn ε-regulären Partitionsgraph $G^H_{\bar{n},\bar{m}}$ enthält, ist dieser fast sicher nicht H-frei.

Beweis. Seien $\bar{n}$ und $\bar{m}$ erst einmal fest. Seien weiterhin $v := v_H$ die Knotenzahl von H und $e := e_H$ seine Kantenzahl Der Erwartungswert für die Anzahl H-freier dünn ε-regulären Partitionsgraphen liegt höchstens bei:

$$n^{v\bar{n}}\alpha^{\bar{m}}\binom{\binom{v}{2}\bar{n}^2}{e\bar{m}}\left(\frac{m}{\binom{n}{2}}\right)^{e\bar{m}} \overset{(1.2)}{\leq} n^{v\bar{n}}\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{e}}\mathrm{e}\binom{v}{2}\bar{n}^2 m}{e\bar{m}\binom{n}{2}}\right)^{e\bar{m}} \leq n^{v\bar{n}}\left(\frac{1}{2}\right)^{e\bar{m}}$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, weil in Vermutung 2.5 α beliebig klein gewählt werden kann und e, v und k Konstanten sind.

Da es höchstens n Möglichkeiten gibt, $\bar{n}$ zu wählen, und m Möglichkeiten für $\bar{m}$, ist der Erwartungswert beschränkt durch

$$nmn^{v\bar{n}}\left(\frac{1}{2}\right)^{e\bar{m}},$$

was mit $n \to \infty$ gegen 0 strebt. □

Nachdem Proposition 2.9 und Lemma 2.8 nun eine dünn ε-reguläre Partition in eine konstante (d.h. von n unabhängige) Anzahl von Klassen des $G_{n,m}$ liefern, soll im Folgenden noch geklärt werden, dass in jeder solchen Partition fast alle Kanten zu dünn ε-regulären Paaren der „richtigen“ Dichte gehören.

Definition 2.12. *Zu einem Graphen G mit n Knoten und m Kanten mit einer dünn ε-regulären Partition $\Pi = (V_0, \ldots, V_k)$ heißt eine Kante $e = \{v, w\}$ für $v \in V_i$ und $w \in V_j$ mit $1 \leq i < j \leq k$ (a, Π)*-gut, *falls (V_i, V_j) dünn ε-regulär ist und $a \leq \bar{d}(V_i, V_j) \leq \frac{1}{a}$.*

Nun zeigt das folgende Lemma (aus [13]), dass es immer ein a gibt, so dass mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit alle Partitionen sehr viele (a, Π)-gute Kanten enthalten.

Lemma 2.13. *Für jedes $\alpha > 0$ gibt es ein $\varepsilon(\alpha) > 0$, ein $a(\alpha) > 0$ und ein $n_0 = n_0(\alpha)$ so dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Folgende für $G_{n,m}$ mit $n \geq n_0$ und $m \geq n \ln n$ nicht gilt, kleiner als α^m ist.*

In jeder dünn ε-regulären Partition $\Pi = (V_1, \ldots, V_k)$ von $V(G)$ mit $\frac{1}{\varepsilon} < k < \ln \ln n$ sind höchstens $\alpha\frac{m}{2}$ Kanten nicht (a, Π)-gut.

Beweis. Für eine Partition $\Pi = (V_1, \ldots, V_k)$ eines $G \in G_{n,m}$ wie in der Aussage des Lemmas sind alle nicht (a, Π)-guten Kanten von einem der folgenden vier Typen:

1. Kanten zwischen V_i und V_j mit $\bar{d}(V_i, V_j) < a$

   Die Anzahl solcher Kanten ist durch $2am$ von oben beschränkt, also mit $a < \frac{\alpha}{16}$ sind es weniger als $\frac{\alpha m}{8}$.

2. Kanten zwischen V_i und V_j mit $\bar{d}(V_i, V_j) > \frac{1}{a}$

   Die Anzahl der Paare mit so einer großen Dichte ist kleiner als ak^2. Damit kann, nach Korollar 2.10, die Anzahl der Kanten, die solche Paare verbinden, auf einen beliebig kleinen Anteil von m reduziert werden, indem man a in Abhängigkeit des dort gefundenen η klein genug wählt.

3. Kanten in V_i für $1 \leq i \leq k$

   Angenommen mehr als $\frac{\alpha m}{8}$ Kanten verliefen innerhalb der V_i. Dann teile man jede Klasse V_i in zwei annähernd gleich große V_i' und V_i'' so dass mehr als die Hälfte der Kanten in V_i zwischen den beiden neuen Klassen verlaufen (dies ist nach Proposition 1.7 möglich). Nun gilt für die neue Partition $\Pi' = (V_1', V_1'', \ldots, V_k', V_k'')$, dass in ihr mehr als $\frac{\alpha m}{16}$ Kanten nur zwischen $k < \varepsilon\binom{2k}{2}$ Klassen verlaufen, was mit $\delta := \frac{\alpha}{8}$ und $\varepsilon < \eta(\alpha, \delta)$ ein Widerspruch zu Korollar 2.10 ist.

4. Kanten zwischen V_i und V_j mit $a \leq \bar{d}(V_i, V_j) \leq \frac{1}{a}$, bei denen (V_i, V_j) nicht dünn ε-regulär ist.

   Da Π dünn ε-regulär ist, ist die Anzahl nicht regulärer Paare kleiner als εk^2. Die Anzahl der Kanten zwischen solchen Paaren ist also beschränkt durch $\frac{3\varepsilon m}{a}$ und ist mit $\varepsilon < \frac{\alpha a}{24}$ auch kleiner als $\frac{\alpha m}{8}$.

□

Eine weitere Aussage über die Beschränktheit der Kantendichte zwischen größeren Knotenteilmengen des $G_{n,m}$ liefert die folgende Proposition (aus [8]), die allerdings keine so gute Wahrscheinlichkeitsschranke erreicht:

Proposition 2.14. *Für jede Konstante $0 < \xi < 1$ gilt (mit $G \in \mathcal{G}_{n,m}$ und $m \geq n \ln n$ gleichverteilt zufällig gewählt) fast sicher, dass zu zwei beliebigen disjunkten Mengen $U, W \subseteq V(G)$ mit $|U| = |W| \geq \xi n$ immer $\bar{d}(U, W) \leq 1 + \xi$.*

Beweis. Sei G wie oben gewählt und U und W erst einmal fest. Da die Kantenzahl in einer Knotenteilmenge des $G_{n,m}$ hypergeometrisch verteilt ist, lässt sich hier Korollar 1.17 anwenden, um die Wahrscheinlichkeit einer großen Abweichung von der erwarteten Kantenzahl abzuschätzen.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\bar{d}(U,W) > 1+\xi\right] &= \mathbb{P}\left[e(U,W) > (1+\xi)|U||W|\frac{m}{\binom{n}{2}}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[e(U,W) > (1+\xi)\mathbb{E}\left[e(U,W)\right]\right] \\
&\leq \left(\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(1+\xi)^{1+\xi}}\right)^{\mathbb{E}[e(U,W)]} \leq \left(\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(1+\xi)^{1+\xi}}\right)^{(\xi n)^2\frac{m}{\binom{n}{2}}} \\
&\leq \left(\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(1+\xi)^{1+\xi}}\right)^{\xi^2 m}
\end{aligned}$$

Da es höchstens

$$\binom{n}{\xi n}^2 \overset{(1.2)}{\leq} \left(\frac{\mathrm{e}}{\xi}\right)^{2\xi n}$$

Möglichkeiten gibt U und W zu wählen, gilt für die Gesamtwahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}\left[\exists U,W : \bar{d}(U,W) > 1+\xi\right] \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{\xi}\right)^{2\xi n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(1+\xi)^{1+\xi}}\right)^{\xi^2 m}$$

was wegen $m \geq n \ln n$ für genügend großes n gegen 0 strebt. □

2.3 Ramsey

Eine natürliche Verallgemeinerung der Fragen aus Abschnitt 1.2 besteht in der Betrachtung der Ramseyeigenschaften zufälliger Graphen.

Das zentrale Theorem hier ist von Rödl und Ruciński bewiesen worden. Dabei findet sich der Beweis der „0-Aussage“ in [18] und [14] und der der „1-Aussage“ in [19].

Satz 2.15. *Für jeden Graph H, der nicht nur aus Sternen und Pfaden mit drei Kanten besteht, gibt es Konstanten C_1 und C_2, so dass gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[G_{n,m} \to (H)^e_r\right] = \begin{cases} 0 & \textit{if } m \leq C_1 n^{2-\frac{1}{m_2(H)}}, \\ 1 & \textit{if } m \geq C_2 n^{2-\frac{1}{m_2(H)}}. \end{cases}$$

Der dort angegebene Beweis der „1-Aussage“ benutzt die Vermutung 2.5 nicht. Es ist jedoch möglich, diesen Beweis unter Benutzung der Vermutung erheblich zu verkürzen:

Beweis der „1-Aussage“ mittels Vermutung 2.5. Sei $G \in \mathcal{G}_{n,m}$ gleichverteilt zufällig gewählt. Nach Proposition 2.9 und Korollar 2.7 ist fast sicher jeder spannende Subgraph von G $(f, \ln\ln n, b)$-beschränkt (für noch zu definierendes b).

Des Weiteren gilt nach Proposition 2.14 fast sicher für alle disjunkten Teilmengenpaare U, W von $V(G)$ mit $|U| \geq \xi V$ und $|W| \geq \xi V$, dass $\bar{d}(U,W) \leq 1+\xi$ (für noch zu definierendes ξ). Demzufolge genügt es, die Aussage für einen Graphen G zu zeigen, der die beiden obigen Eigenschaften hat.

Es wird gezeigt, dass aus Vermutung 2.5 folgt, dass für jedes $r > 0$ ein $C_2 > 0$ existiert, so dass für $m \geq C_2 n^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$ fast sicher jede r-Färbung von G eine einfarbige Kopie von H enthält.

Sei $h := \chi(H)$ und k_0 so dass für alle $k \geq k_0$

$$\mathrm{ex}(K_k, H) \leq \left(1 - \frac{1}{h-1} + \delta\right)\binom{k}{2}.$$

Die Existenz eines solchen k_0 sichert Satz 1.12.

Nach dem Schubfachprinzip enthält eine Färbung der Kanten mit r Farben immer eine Farbklasse mit mindestens $\frac{m}{r}$ Kanten. Es bleibt nun nur zu zeigen, dass (für m wie oben) fast sicher jeder Subgraph von G mit mindestens $\frac{m}{r}$ Kanten (der also potentiell die Kanten der größten Farbklasse enthalten könnte) einen dünn ε-regulären Partitionsgraph $G^H_{\bar{n},\bar{m}}$ mit $\frac{n}{k_0} \leq \bar{n}$ und $\bar{m} \geq c\bar{n}^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$ besitzt, wobei c und ε wie aus Vermutung

2.5 seien. Aus Lemma 2.11 folgt dann, dass G fast sicher keinen H-freien Partitionsgraph $G^H_{\bar{n},\bar{m}}$ (mit $\bar{n}$ und $\bar{m}$ wie oben) besitzt, und so ist die Proposition bewiesen.

Sei also J ein spannender Subgraph von G mit mindestens $\frac{m}{r}$ Kanten (sollten die $\frac{m}{r}$ Kanten G nicht aufspannen, so nehme man einfach die restlichen Knoten ohne weitere Kanten hinzu). Da J (siehe oben) $(f, \ln\ln n, b)$-beschränkt ist, kann man Lemma 2.8 anwenden, um eine dünn ε-reguläre Partition der Knotenmenge von J in die Mengen $V_1, \dots, V_k$ zu erhalten. Sei dabei $\bar{n} = |V_1| = \dots = |V_k|$.

Nun definiere man einen Hilfsgraph F auf $\{1, \dots, k\}$, der eine Kante zwischen i und j enthält, genau dann wenn das Paar V_i, V_j dünn ε-regulär ist und die Anzahl der Kanten durch $e(V_i, V_j) \geq \bar{m} = c\bar{n}^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$ von unten beschränkt ist.

Falls man jetzt zeigen kann, dass die Anzahl der Kanten in F mindestens $(1 - \frac{1}{h-1} + \delta)\binom{k}{2}$ beträgt, folgt aus Satz 1.12, dass F den Graphen H und somit J einen Partitionsgraphen $G^H_{\bar{n},\bar{m}}$ enthält.

Aus Lemma 2.13 ist bekannt, dass (mit $\alpha := \min\left\{\frac{1}{r}, \delta\right\}$) eine Konstante $a = a(\alpha)$ existiert, so dass (mit Fehlerwahrscheinlichkeit kleiner α^m) alle (bis auf $\frac{\delta}{2}e(J)$ viele) Kanten in J zwischen Paaren verlaufen, für die $\bar{d}(V_i, V_j) \geq a$ gilt. Da es höchstens $\binom{m}{\frac{m}{r}}$ Subgraphen J gibt, hat fast sicher jedes J diese Eigenschaft.

Für diese Paare gilt somit auch

$$\begin{aligned} e(V_i, V_j) &\geq \bar{d}(V_i, V_j)\frac{m}{r\binom{n}{2}}|V_i||V_j| \geq a\frac{m}{r\binom{n}{2}}\left(\frac{n}{k}\right)^2 \\ &\geq a\frac{m}{rk^2}. \end{aligned}$$

Damit ist mit $C_2 := \frac{rk^2}{a}c$ die Voraussetzung für $\bar{m}$ erfüllt.

Andererseits liefert Proposition 2.14 mit $\xi := \min\{\frac{1}{k}, \frac{1}{h-1} - 2\delta\}$ (siehe oben), dass für alle Paare (V_i, V_j) gilt: $\bar{d}(V_i, V_j) \leq 1 + \xi$. Demzufolge können sich die Kanten zwischen den regulären Paaren nicht allzusehr ballen und es gilt:

$$\begin{aligned} e(F) &\geq \frac{(1-\delta)e(J)}{(1+\xi)\frac{e(J)}{\binom{n}{2}}\left(\frac{n}{k}\right)^2} = \frac{1-\delta}{1+\xi}\frac{\binom{n}{2}}{\left(\frac{n}{k}\right)^2} \geq \frac{1-\delta}{1+\xi}\binom{k}{2} \\ &\geq \frac{1-\delta}{1+\frac{1}{h-1}-2\delta}\binom{k}{2} \geq \frac{1-\delta}{1+\frac{1-2\delta(h-1)}{h-2+\delta(h-1)}}\binom{k}{2} \\ &= \frac{1-\delta}{\frac{(1-\delta)(h-1)}{h-2+\delta(h-1)}}\binom{k}{2} = \left(1 - \frac{1}{h-1} + \delta\right)\binom{k}{2} \end{aligned}$$

Damit enthält F genügend Kanten, und die Proposition ist bewiesen. □

2.4 Turán

Obwohl die extremalen Aussagen über zufällige Graphen nicht viel schwieriger erscheinen als die Pendants in der Ramseytheorie, ist es hier noch nicht gelungen, die vollständigen Analogien zu den Sätzen 1.12 und 1.13 zu beweisen.

Entsprechende Vermutungen werden in diesem Abschnitt dargelegt und es wird gezeigt, wie diese aus Vermutung 2.5 abgeleitet werden können.

2.4.1 Erweiterung des Erdős-Stone-Satzes

Eine mögliche Erweiterung von Satz 1.12 ist die folgende, noch unbewiesene Vermutung von Kohayakawa, Łuczak und Rödl [10]:

Vermutung 2.16. *Für jeden Graph H, der mindestens drei Knoten hat, und jedes $\delta > 0$ gibt es eine Konstante C, so dass für $m \geq Cn^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$ gilt:*

$$\mathrm{ex}(G_{n,m}, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \delta\right) m.$$

Nimmt man einen etwas anderen Schwellenwert an, so ist die Vermutung allerdings bereits für die vollständigen Graphen von Kohayakawa und Rödl [11] gezeigt worden.

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie diese Vermutung aus Vermutung 2.5 gefolgert werden kann. Dass dieses möglich sein soll, steht bereits bei den Autoren der Vermutung, der Beweis findet sich zum Beispiel bei Kreuter [12].

Proposition 2.17. *Falls für einen Graphen H mit mindestens drei Knoten die Vermutung 2.5 gilt, so gilt für ihn auch Vermutung 2.16.*

Beweis. Es wird gezeigt, dass aus Vermutung 2.5 folgt, dass für jedes $\delta > 0$ ein $C > 0$ existiert, so dass für $m \geq Cn^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$ fast sicher:

$$\mathrm{ex}(G_{n,m}, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \delta\right) m.$$

Sei δ fest und r so wie am Ende des Beweises definiert sowie $t := \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \delta\right) m$.

Sei k_0 so dass für alle $k \geq k_0$

$$\mathrm{ex}(K_k, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \delta\right) \binom{k}{2}.$$

Die Existenz eines solchen k_0 sichert Satz 1.12.

Es bleibt nun nur zu zeigen, dass (für m wie oben) fast sicher jeder Subgraph des $G_{n,m}$ mit mindestens t Kanten einen dünn ε-regulären Partitionsgraph $G^H_{\bar{n},\bar{m}}$ mit $\frac{n}{k_0} \leq \bar{n}$ und $\bar{m} \geq c\bar{n}^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$ besitzt, wobei c und ε wie aus Vermutung 2.5 seien. Aus Lemma 2.11 folgt dann, dass $G_{n,m}$ fast sicher keinen H-freien Partitionsgraph $G^H_{\bar{n},\bar{m}}$ (mit $\bar{n}$ und $\bar{m}$ wie oben) besitzt, und so ist die Proposition bewiesen.

Sei also J ein spannender Subgraph von $G_{n,m}$ mit mindestens t Kanten. Da wegen Proposition 2.9 $G_{n,m}$ fast sicher (f, L, b)-beschränkt ist, ist es auch J. Also kann man

Lemma 2.8 anwenden, um eine dünn ε-reguläre Partition der Knoten von J in die Mengen $V_1, \ldots, V_k$ zu erhalten. Sei dabei $\bar{n} = |V_1| = \cdots = |V_k|$.

Nun definiere man einen Hilfsgraph F auf $\{1, \ldots, k\}$, der eine Kante zwischen i und j enthält, genau dann wenn das Paar V_i, V_j dünn ε-regulär ist und die Anzahl der Kanten durch $e(V_i, V_j) \geq \bar{m} = c\bar{n}^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$ von unten beschränkt ist.

Falls man jetzt zeigen kann, dass die Anzahl der Kanten in F mindestens $(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \delta)\binom{k}{2}$ beträgt, folgt aus Satz 1.12, dass F den Graphen H und somit J einen Partitionsgraphen $G^H_{\bar{n},\bar{m}}$ enthält.

Aus 2.13 ist bekannt, dass eine Konstante $a = a(\delta)$ existiert, so dass (mit Fehlerwahrscheinlichkeit kleiner α^m) alle (bis auf $\frac{\delta}{2}e(J)$ viele) Kanten in J zwischen Paaren verlaufen, für die $\bar{d}(V_i, V_j) \geq a$ gilt. Da es höchstens $\binom{m}{t}$ Subgraphen J gibt, hat fast sicher jedes J diese Eigenschaft.

Für diese Paare gilt somit auch

$$\begin{aligned} e(V_i, V_j) &\geq \bar{d}(V_i, V_j)\frac{t}{\binom{n}{2}}|V_i||V_j| \geq a\frac{t}{\binom{n}{2}}\binom{n}{k}^2 \\ &\geq a\left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \delta\right)\frac{m}{k^2}. \end{aligned}$$

Damit ist mit $C := \frac{k^2}{a\left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}+\delta\right)}c$ die Voraussetzung für $\bar{m}$ erfüllt.

Der Beweis, dass F genügend Kanten hat, erfolgt nun genau wie im Beweis der 1-Aussage von Satz 2.15. Das heißt, man schließt mit Hilfe von Proposition 2.14, dass für alle Paare (V_i, V_j) fast sicher $\bar{d}(V_i, V_j) \leq 1 + \xi$ gilt und gelangt mit der identischen Rechnung auch zu dem Ergebnis, dass

$$e(F) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \delta\right)\binom{k}{2}$$

Damit enthält F genügend Kanten und die Proposition ist bewiesen. □

2.4.2 Erweiterung des Stabilitätssatzes

Analog zum Stabilitätstheorem im deterministischen Fall wird auch in der Theorie zufälliger Graphen eine Aussage über Graphen vermutet, deren Kantenzahl nahe der extremalen liegt. Dies ist Inhalt der folgenden Vermutung, die ebenfalls von Kohayakawa, Łuczak und Rödl [10] formuliert wurde und auch aus Vermutung 2.5 abgeleitet werden kann.

Vermutung 2.18. *Sei H ein Graph mit $\chi(H) \geq 3$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass fast jeder $G_{n,m}$ die Eigenschaft hat, dass jeder H-freie Subgraph $J \subseteq G_{n,m}$ mit $e_J \geq (1-\delta)\operatorname{ex}(G_{n,m}, H)$ durch Entfernen von maximal εe_J Kanten $(\chi(H)-1)$-partit wird.*

Proposition 2.19. *Falls für einen Graphen H mit $\chi(H) \geq 3$ die Vermutung 2.5 gilt, so gilt für ihn auch Vermutung 2.18.*

Der Beweis ist sehr ähnlich zu dem von Proposition 2.17 und wird deshalb hier nur skizziert.

Beweisskizze. Sei $J \subseteq G_{n,m}$ mit der Kantenzahl wie in der Aussage der Vermutung. Wie im Beweis von Proposition 2.17 wendet man jetzt das dünne Regularitätslemma 2.8 auf J an und erhält eine Partition in der genügend Knotenpaare dünn regulär sind und viele Kanten aufspannen.

Andererseits findet man nach Lemma 2.11 fast sicher keinen H-freien Partitionsgraphen zu H in $G_{n,m}$, so dass der Hilfsgraph, den die Partitionsklassen von J aufspannen, H-frei sein muss und somit nach dem Stabilitätssatz 1.13 leicht in einen $(\chi(H) - 1)$-partiten Graphen zu überführen ist. Demzufolge gilt das auch für J selbst, denn der Partitionsgraph enthält fast alle Kanten von J und zu jeder aus dem Hilfsgraph zu entfernenden Kante korrespondieren nur konstant viele Kanten in J. $\square$

2.5 Graphen ohne einen festen Subgraph

Die Sätze im folgenden Abschnitt orientieren sich alle an dem Artikel von Łuczak [13]. Dort werden sie unter Bezugnahme auf Vermutung 2.5 formuliert und, da selbige bisher nur für Dreiecke verfügbar war, auch nur für eben diese bewiesen.

Seine Erweiterung gibt sowohl detailliertere Informationen über das Verhalten von Graphen im $G_{n,m}$-Modell als auch über das noch relativ unerforschte Gebiet der Entwicklung zufälliger H-freier Graphen.

Das Hauptproblem in der Analyse H-freier Graphen ist, dass es davon nur „sehr wenige“ gibt. Da die Wahrscheinlichkeit, dass ein Graph H nicht in $G_{n,m}$ enthalten ist, nach unten beschränkt ist durch die Wahrscheinlichkeit, dass $G_{n,m}$ $(\chi(H) - 1)$-partit ist, gilt:

$$\mathbb{P}\left[H \not\subseteq G_{n,m}\right] \geq \left(\frac{\frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}\binom{n}{2} - m}{\binom{n}{2}}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \frac{m}{\binom{n}{2}}\right)^m \tag{2.1}$$

Ist die Wahrscheinlichkeit, dass $G_{n,m}$ eine Eigenschaft $\mathcal{A}$ besitzt, also für jedes α kleiner als α^m, so folgt daraus schon unmittelbar, dass auch fast sicher kein H-freier $G_{n,m}$ diese Eigenschaft besitzen wird (vorausgesetzt, die Größe von H ist unabhängig von n).

Damit ist es also zum Beispiel mit den Erkenntnissen aus Proposition 2.9 möglich, das Regularitätslemma 2.8 auch auf beliebige H-freie Graphen anzuwenden.

Das folgende Lemma gibt eine ähnlich starke Schranke für die Verteilung von Kanten in einem Partitionsgraph und liefert so eine gute Ergänzung zu Lemma 2.13 (allerdings nur für den nicht bipartiten Fall).

Lemma 2.20. *Für jedes $h \geq 3$ und jedes $\eta > 0$ gibt es ein $\varepsilon(h,\eta) > 0$, ein $\xi(h,\eta) > 0$ und ein $n_0 = n_0(h,\eta)$ so dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Folgende für $G_{n,m}$ mit $n \geq n_0$ und $m \geq n \ln n$ gilt, kleiner als $(1 - \frac{1}{h-1} - \frac{\eta}{2})^m$ ist.*

Es gibt eine ausgeglichene Partition $\Pi = (V_1, \ldots, V_k)$ von $V(G)$ mit $\frac{1}{\varepsilon} < k < \ln\ln n$ und eine Menge von Paaren $J \subseteq \{(i,j) : 1 \leq i < j \leq k\}$ mit $|J| \leq (1 - \frac{1}{h-1} - \eta)\binom{k}{2}$, so dass höchstens ξm Kanten nicht zwischen Paaren (V_i, V_j) mit $(i,j) \in J$ verlaufen.

Beweis. Seien Π und J wie in der Aussage des Lemmas. Für ε klein genug gilt:

$$|W_J| := |\{(v,w) : v \in V_i, w \in V_j, (i,j) \in J\}| \leq \left(1 - \frac{1}{h-1} - \frac{2\eta}{3}\right)\binom{n}{2}.$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass zu gegebenem Π und J alle bis auf ξm Kanten des $G_{n,m}$ in W_J sind kleiner als

$$m\binom{m}{\xi m}\left(\frac{1 - \frac{1}{h-1} - \frac{2\eta}{3}}{1-\xi}\right)^{(1-\xi)m} \overset{(1.2)}{\leq} m\left(\left(\frac{\mathrm{e}}{\xi}\right)^{\xi}\frac{1}{1-\xi}\left(1 - \frac{1}{h-1} - \frac{2\eta}{3}\right)\right)^{(1-\xi)m}$$

was für ξ klein genug kleiner ist als $\left(1 - \frac{1}{h-1} - \frac{3\eta}{5}\right)^m$. Da es höchstens

$$(\ln\ln n)2^{\binom{\ln\ln n}{2}} < 2^{\frac{m}{\ln\ln n}}$$

Möglichkeiten gibt Π und J zu wählen, ist die Wahrscheinlichkeit, dass $G_{n,m}$ die gefragte Eigenschaft hat, kleiner als:

$$2^{\frac{m}{\ln\ln n}}\left(1 - \frac{1}{h-1} - \frac{3\eta}{5}\right)^m \leq \left(1 - \frac{1}{h-1} - \frac{\eta}{2}\right)^m$$

□

2.5.1 superexponentieller Abfall

Bereits in Abschnitt 1.5 wurde gezeigt, was über die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Vorkommens eines festen nicht bipartiten Graphen H in $G_{n,p}$ bzw. $G_{n,m}$ gesagt werden kann.

Folgende Vermutung über die Anzahl H-freier Graphen, wobei H bipartit ist, ist nach Łuczak [13] auch eine Folgerung aus 2.5.

Vermutung 2.21. *Für jeden bipartiten Graph H, und jedes $\alpha > 0$ gibt es Konstanten c und n_0, so dass für $n \geq n_0$ und $cn^{2-\frac{1}{m_2(H)}} \leq m \leq \frac{1}{c}n^2$ gilt:*

$$\mathbb{P}[H \nsubseteq G_{n,p}] \leq \alpha^m.$$

Proposition 2.22. *Falls für einen bipartiten Graphen H die Vermutung 2.5 gilt, so gilt für ihn auch Vermutung 2.21.*

Beweis. Aus Lemma 2.9 ist bekannt, dass ein $b = b(\frac{\alpha}{2})$ und ein $n_0 = n_0(\frac{\alpha}{2})$ existieren, so dass die Wahrscheinlichkeit eines Graphen aus $G_{n,m}$ nicht $(f, 2\ln\ln n, b)$-beschränkt zu sein, kleiner als $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^m$ ist. Auf einen so beschränkten Graphen G wende man nun Lemma 2.8 mit $m \geq cn^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$ mit einem kleinen, später zu bestimmenden $\varepsilon > 0$ an. Sei $\Pi = (V_1, \ldots, V_k)$ die resultierende dünn (ε, k)-reguläre Partition. Aus Lemma 2.13 weiß man, dass, für ε klein genug, eine Konstante $a = a(\frac{\alpha}{2})$ existiert, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als $\frac{m}{2}$ Kanten in G (a, Π)-gut sind, kleiner als $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^m$ ist.

Eine solche Unterteilung Π heißt im Folgenden *geeignet* und die Paare (V_i, V_j), für die die Dichtebedingung aus Definition 2.12 gilt, heißen *nützlich.*

Für jedes nützliche Paar (V_i, V_j) gilt im Übrigen $\frac{am}{k^2} \leq e_G(V_i, V_j) \leq \frac{3m}{ak^2}$. Da mindestens $\frac{m}{2}$ Kanten (a, Π)-gut sind, gibt es also mindestens $\frac{ak^2}{6}$ nützliche Paare in jedem geeigneten Π.

Nun schätzt man die Wahrscheinlichkeit ab, dass ein Graph G' der gleichverteilt zufällig aus der Menge der Graphen mit n Knoten und m Kanten, die mindestens eine geeignete Unterteilung besitzen, gewählt wurde, H-frei ist. Zuerst wähle man eine Unterteilung Π wofür es maximal $(\ln\ln n)^n$ Möglichkeiten gibt. Dann würfele man aus, welche Paare nützlich sind und wähle die Kantenzahl für jedes solche Paar (wofür es höchstens $(m+2)^{k^2} \leq n^{\ln\ln n}$ Möglichkeiten gibt. Abschließend erzeuge man die bipartiten Graphen, die von diesen Paaren induziert werden. Wenn $\varepsilon \leq \varepsilon'(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{7}{a^2}}, H)$ und $c \geq \frac{2c'(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{7}{a^2}}, H)L^2}{a}$, wobei ε' und c' so wie in Vermutung 2.5 definiert sind, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die bipartiten Subgraphen keine Kopie von H aufspannen begrenzt durch:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{7}{a^2}\frac{am}{k^2}} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{7m}{ak^2}}$$

Da es mindestens $\frac{ak^2}{6}$ nützliche Paare in Π gibt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass G' H-frei ist, beschränkt durch

$$(\ln\ln n)^n n^{\ln\ln n} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{7m}{ak^2}\frac{ak^2}{6}} < \left(\frac{\alpha}{2}\right)^m$$

Da die Wahrscheinlichkeit, dass G keine geeigneten Unterteilungen enthält, kleiner als $2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^m$ ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass G keine Kopie von H enthält höchstens $3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^m < \alpha^m$. □

2.5.2 Partitionierung von Graphen

Die folgende Vermutung ist im Prinzip das Analogon zu 2.18 für H-freie Graphen.

Vermutung 2.23. *Für jeden Graphen H mit $\chi(H) \geq 3$, und jedes $\delta > 0$ gibt es ein c, so dass für $cn^{2-\frac{1}{m_2(H)}} \leq m \leq \frac{1}{c}n^2$ und G zufällig aus der Menge aller H-freien Graphen* *auf n Knoten mit m Kanten gilt:*

$$\mathbb{P}\left[\chi(G') \geq \chi(H)\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

wobei G' aus G durch das Entfernen von δm Kanten entsteht.

Alternativ kann man auch formulieren, dass G fast sicher einen $(\chi(H)-1)$-partiten Subgraphen enthält der höchstens δm Kanten weniger hat, als G selbst.

Proposition 2.24. *Falls für einen Graphen H mit $\chi(H) \geq 3$ die Vermutung 2.5 gilt, so gilt für ihn auch Vermutung 2.23.*

Beweis. Seien $h := \chi(H) \geq 3$ und $\delta > 0$ gegeben und sei weiterhin $\delta' := \eta(\frac{1}{4}, \frac{\delta}{2})$ für η wie in Korollar 2.10 definiert. Weiterhin sei $\nu = \nu(\delta', h)$ so wie aus Korollar 1.14. Ausserdem seien $\xi = \xi(h, \nu)$ und $\varepsilon' = \varepsilon(h, \nu)$ so wie in Lemma 2.20 und $\alpha := \min\{\xi, \delta, \frac{1}{4}\}$.

Aus den Lemmas 2.8, 2.9 und 2.13 folgt, dass für eine Konstante a und ε klein sowie c groß genug ein n_0 und ein L existieren, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass $G_{n,m}$ mit $n \geq n_0$ und $m \geq cn^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$ eine $\frac{\varepsilon}{2}$-reguläre Partition $\Pi = (V_1, \dots, V_k)$ mit $\frac{1}{\varepsilon} \leq k \leq L$ besitzt, in der höchstens $\alpha\frac{m}{2}$ Kanten nicht (a, Π)-gut sind, mindestens $1 - \alpha^m$.

Sei $F(G, \Pi)$ ein Hilfsgraph mit den Knoten $\{1, \dots k\}$ und Kanten zwischen i und j immer dann, wenn V_i und V_j durch gute Kanten verbunden werden (also das Paar ε-regulär mit der richtigen Dichte ist). Da $\alpha\frac{m}{2} < \xi m$, hat nach Lemma 2.20, für ε klein genug, der Hilfsgraph F für nur sehr wenige H-freie Graphen $G \in \mathcal{G}_{n,m}$ weniger als $(1 - \frac{1}{h} - \nu)\binom{k}{2}$ Kanten.

Eine Unterteilung mit der obigen Eigenschaft heiße *geeignet*. Nach Korollar 1.14 gibt es jetzt zwei Möglichkeiten:

1. $F(G, \Pi)$ enthält νk^2 disjunkte Kopien von K_h

   Es wird gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür kleiner als 3^{-m} ist.

   Man wähle zuerst eine Partition aus $(\ln\ln n)^n$ möglichen, entscheide dann, wieviele Kanten zwischen die Paare platziert werden und welche Paare $\frac{\varepsilon}{2}$-regulär sein sollen (höchstens $(m+2)^{2k^2} \leq n^{\ln\ln n}$ Möglichkeiten). Nun wählt man noch die Plätze für die νk^2 kantendisjunkten Kopien von K_h (höchstens $k^{hk} \leq \ln n$ Möglichkeiten). Nach Vermutung 2.5 ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Subgraph von G, der zu einer solchen Kopie von K_h korrespondiert, kein H enthält, kleiner als $(\alpha')^{\frac{am}{k^2}}$, wobei α' beliebig klein wird, falls ε klein genug ist. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass G kein H enthält, kleiner als

   $$(\ln\ln n)^n n^{\ln\ln n} \ln n \left((\alpha')^{\frac{am}{k^2}}\right)^{\nu k^2} \leq 2^{\frac{m}{\ln\ln n}} (\alpha')^{a\nu m}$$

   Dies wird, da weder ν noch a von ε abhängen, für ein sehr kleines ε kleiner als 3^{-m} und ist damit eine verschwindende Teilmenge unter den H-freien Graphen.

2. $F(G, \Pi)$ wird durch Entfernen von δ' Kanten $(h-1)$-partit.

   Nach Korollar 2.10 und der Wahl von δ' kann für ausreichend viele Graphen aus $\mathcal{G}_{n,m}$ der Subgraph, der durch die (a, Π)-guten Kanten aufgespannt wird, durch Entfernen von höchstens $\delta \frac{m}{2}$ Kanten $(h-1)$-partit gemacht werden. Da aber bis auf $\alpha \frac{m}{2} \leq \delta \frac{m}{2}$ viele alle Kanten von G (a, Π)-gut sind, lässt sich G durch Entfernen von δ Kanten $(h-1)$-partit machen.

□

2.5.3 Die Anzahl H-freier Graphen

Da Vermutung 2.23 besagt, dass H-freie Graphen fast sicher auch $\chi(H)-1$-partit sind, ist es nicht verwunderlich, dass man daraus etwas über die Anzahl der H-freien Graphen (beziehungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass $G_{n,m}$ H-frei ist) folgern kann, denn die Anzahl der $\chi(H)-1$-partiten Graphen ist relativ leicht abzuschätzen. Formalisiert wird dies in der folgenden Vermutung.

Vermutung 2.25. *Für jeden Graph H mit $\chi(H) \geq 3$, und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein c und n_0, so dass für $cn^{2-\frac{1}{m_2(H)}} \leq m \leq \frac{1}{c}n^2$ gilt:*

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \varepsilon\right)^m \leq \mathbb{P}\left[H \not\subseteq G_{n,m}\right] \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \varepsilon\right)^m$$

Proposition 2.26. *Falls für einen Graphen H mit $\chi(H) \geq 3$ die Vermutung 2.5 gilt, so gilt für ihn auch Vermutung 2.25.*

Beweis. Sei $h := \chi(H)$. Die linke Seite der Ungleichung gilt auf Grund der Beschränkung der Anzahl H-freier Graphen durch die Anzahl $\chi(H)$-partiter Graphen (siehe (2.1)).

Um die rechte Seite zu zeigen, bezeichne $\mathcal{D}_{\delta,h-1}$ das Ereignis, dass $G_{n,m}$ durch das Entfernen von δ Kanten $(h-1)$-partit wird. Dann gilt nach Vermutung 2.23

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[H \not\subseteq G_{n,m}\right] &= \mathbb{P}\left[H \not\subseteq G_{n,m} \wedge \mathcal{D}_{\delta,h-1}\right] + \mathbb{P}\left[H \not\subseteq G_{n,m} \wedge \neg\mathcal{D}_{\delta,h-1}\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[\mathcal{D}_{\delta,h-1}\right] + \mathbb{P}\left[\neg\mathcal{D}_{\delta,h-1} | H \not\subseteq G_{n,m}\right] \mathbb{P}\left[H \not\subseteq G_{n,m}\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[\mathcal{D}_{\delta,h-1}\right] + o\left(\mathbb{P}\left[H \not\subseteq G_{n,m}\right]\right)
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt wie in (2.1):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\mathcal{D}_{\delta,h-1}\right] &\leq (h-1)^n \delta m \binom{(\frac{1}{h-1} + O(\frac{1}{n}))\binom{n}{2}}{\delta m} \binom{(1 - \frac{1}{h-1} + O(\frac{1}{n}))\binom{n}{2}}{(1-\delta)m} \binom{\binom{n}{2}}{m}^{-1} \\
&\leq h^n \left(1 - \frac{1}{h} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m \left(\frac{20}{\delta}\right)^{\delta m}
\end{aligned}$$

was für δ klein genug kleiner als $\left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \varepsilon\right)^m$ wird. □

3 Das Key Lemma für Kreise

Nachdem nun dargestellt worden ist, welche Konsequenzen ein Beweis des Key Lemma (Vermutung 2.5) für einige Aussagen in der Theorie zufälliger Graphen hätte, soll im Folgenden dieses Lemma für den Fall, dass der betrachtete Graph H ein Kreis ist, bewiesen werden.

3.1 Kurze Wiederholung

Um die hier zu beweisende Aussage des Lemmas noch einmal in den Vordergrund zu stellen, wird sie hier nochmals als Satz formuliert:

Satz 3.1. *Bezeichne C_l einen Kreis der Länge l. Für jedes $l \geq 3$ und jedes $\alpha > 0$ gibt es Konstanten $\varepsilon = \varepsilon(l, \alpha)$ und $c = c(l, \alpha)$, so dass für $m \geq cn^{1+\frac{1}{l-1}}$ gilt:*

$$\mathbb{P}\left[G_{n,m}^{C_l} \text{ enthält keinen Kreis der Länge } l \cap G_{n,m}^{C_l} \text{ ist dünn } \varepsilon\text{-regulär}\right] \leq \alpha^m.$$

Hier ist es wichtig zu bemerken, dass

$$m_2(C_l) = d_2(C_l) = \frac{l-1}{l-2} = \frac{1}{1+\frac{1}{l-1}} \tag{3.1}$$

und dass in einem Partitionsgraph $G := G_{n,m}^F$, wobei l die Anzahl der Knoten in F sei, für die Kantendichte mit $n \geq 2$:

$$\rho_G \leq \frac{\binom{l}{2}m}{\binom{ln}{2}} = \frac{l(l-1)m}{ln(ln-1)} = \frac{(l-1)m}{n(ln-1)} \leq \frac{lm}{(l+1)n^2} \tag{3.2}$$

und für die $(\rho_G; G)$-Dichte zwischen zwei Partitionsklassen U und W mit $s \geq \frac{lm}{(l+1)n^2} \geq \rho_G$:

$$d_{\rho_G,G}(U,W) = \frac{m}{\rho_G n^2} \geq \frac{l+1}{l} \tag{3.3}$$

gelten.

3.2 Vorbereitung

Der Beweis verläuft in etwa wie folgt: Zuerst wird gezeigt, welche Eigenschaften, die aus der ε-Regularität des Graphen folgen, an Stelle dieser ausgenutzt werden können. Dabei ist insbesondere eine Aussage über den Minimalgrad von $\frac{4m}{5n}$ in beliebige (hinreichend große) Teilmengen eines Partners im ε-regulären Paar von Bedeutung (Lemma 3.2).

Diese Eigenschaft wird benutzt, um induktiv zu zeigen, dass sehr viele Knoten in der ersten Partitionsklasse V_1 mindestens $(1-\varepsilon)n$ entfernte Nachbarn (sozusagen Nachbarn $(l-1)$ten Grades) in der letzten Partitionsklasse V_l haben. Dies ist insofern nutzbringend, als dass außerdem jeder dieser Knoten auch noch mindestens $\frac{m}{2n}$ direkte Nachbarn dort hat, was impliziert, dass sich für den einzelnen Knoten die ganze direkte Nachbarschaft sich auf εn Plätzen drängen muss, damit kein Kreis entsteht. Schon dies ist ziemlich unwahrscheinlich, aber das Ganze dann auch noch für linear viele Knoten auf einmal zu verhindern, ist beinahe unmöglich.

Das Hauptproblem bei diesem Induktionsbeweis ist, dass die Expansion der einzelnen Knoten unabhängig voneinander erfolgen soll. Da die Nachbarschaften einer großen Knotenmenge zwangsläufig überlappen, kommt ein direkter Beweis nicht in Frage. Man macht sich vielmehr zu Nutze, dass, wenn nicht $(1-\eta)n$ der Knoten expandieren, es eine Menge der Größe ηn geben muss, in der keiner expandiert, und zeigt, dass dies extrem unwahrscheinlich ist. Dazu nehme man eine feste Menge der Größe ηn und zeige, dass sie eine Teilmenge enthält in der alle Knoten expandieren. Damit die Expansion der einzelnen Knoten unabhängig ist, braucht man dann das Disjunkte-Mengen-Lemma aus 3.4.

Man wähle also sukzessive erst die Nachbarschaften in V_2, disjunktifiziere sie, wähle dann in V_3 usw., bis die Nachbarschaft die gewünschte Größe hat. Leider ist das Schließen in dieser Form nicht bis zur Größe $(1-\varepsilon)n$ möglich, da dass disjunkte-Mengen-Lemma dieses nicht hergibt. So muss man im vorletzten Schritt zuerst auf die Disjunktifizierung verzichten, bevor man dann im letzten Schritt eine Abwandlung eines Lemmas aus [8] benutzt, um die Nachbarschaften auf die Größe $(1-\varepsilon)n$ aufzublasen.

Um die Abhängigkeit von m in der Abschätzung des Satzes zu erhalten, ist es allerdings notwendig, auch bei sehr großem m weiterhin eine Expansion in der Größenordnung $\frac{m}{Cn}$ anzunehmen, so dass die Nachbarschaft, die die geforderten $(1-\varepsilon)n$ Elemente enthält, nicht unbedingt in V_l liegt, sondern eventuell früher erreicht wird. Damit auch in V_l noch genügend Nachbarn liegen, kann man die Größe der Nachbarschaften einfach mittels (beinahe) perfekter Matchings, die sich auf Grund der ε-Regularität (Lemma 3.3) leicht finden lassen, bis in die Menge V_l retten.

Bezeichnet man nun mit V_{a+3} die Menge in der die Nachbarschaft eines Knotens erstmals die geforderte Größe $(1-\varepsilon)n$ hat (diese Definition von a bedeutet, dass genau a Mal das Disjunkte-Mengen-Lemma angewandt wird) so ergibt sich bezüglich der Nutzung der Lemmas in etwa das Bild in Abbildung 3.1.

Man beachte, dass bei $l = 3$ das Disjunkte-Mengen-Lemma gar nicht benutzt wird (entsprechend konnte dieser Fall auch einfach in [8] gezeigt werden), während für $a+3 = l$ die Matchings unnötig werden.

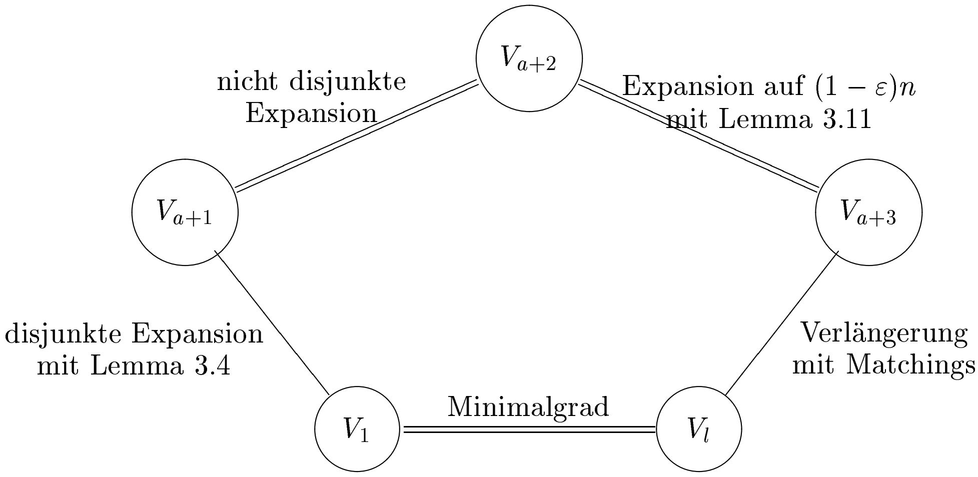

Abbildung 3.1: Lemmabenutzung

3.2.1 Minimalgrad und Matching

Die nachfolgenden Lemmas begründen, warum man sich später nicht um ε-Regularität bemüht, sondern andere Grapheneigenschaften nutzt. Da man im Beweis fast nur über bipartite Subgraphen des Partitionsgraphen $G_{n,m}^{H}$ (die den Kanten in H entsprechen) argumentiert, beschränken sich die Lemmas auch auf Aussagen über eben diese.

Insbesondere Abschätzungen zum Minimalgrad und zur Matchingzahl ergeben sich als einfache Korollare aus der ε-Regularität eines Graphen.

Lemma 3.2. *Seien natürliche Zahlen m, n und $l \geq 3$ sowie reelles $0 < \varepsilon < \frac{1}{50}$ gegeben. Sei H ein bipartiter Graph mit der Partition (U, W) und $|U| = |W| = n$, wobei die Partition $(s; H, \varepsilon)$-regulär für $s := \frac{lm}{(l+1)n^2}$ sei. Dann gibt es für alle Teilmengen $W' \subseteq W$ mit $|W'| \geq \frac{5n}{6}$ eine Teilmenge $U' \subseteq U$ mit $|U'| \geq (1-\varepsilon)n$, so dass für alle $x \in U'$ gilt:*

$$\left|\Gamma(x) \cap W'\right| \geq \frac{4m}{5n} \tag{3.4}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt indirekt. Sei $W' \subseteq W$ beliebig mit $|W'| \geq \frac{5n}{6}$. Angenommen es gibt keine solche Menge U'. Dann muss jede Teilmenge der Größe $(1-\varepsilon)n$ von U mindestens einen Knoten enthalten, dessen Grad nach W' höchstens $\frac{4m}{5n}$ ist. Daraus folgt unmittelbar, dass es eine Teilmenge U^* der Größe εn von U gibt, die nur Knoten vom Grad höchstens $\frac{4m}{5n}$ nach W' enthält. Diese Menge verletzt aber die Regularitätsbedingung, denn es gilt:

$$\begin{aligned} d_{s,H}(U,W) - d_{s,H}(U^*,W') &\geq \frac{m}{sn^2} - \frac{\frac{4m}{5n}\varepsilon n}{s\varepsilon n\frac{5n}{6}} \\ &= \frac{m}{sn^2} - \frac{24m}{25sn^2} \\ &= \frac{l+1}{25l} > \varepsilon \end{aligned}$$

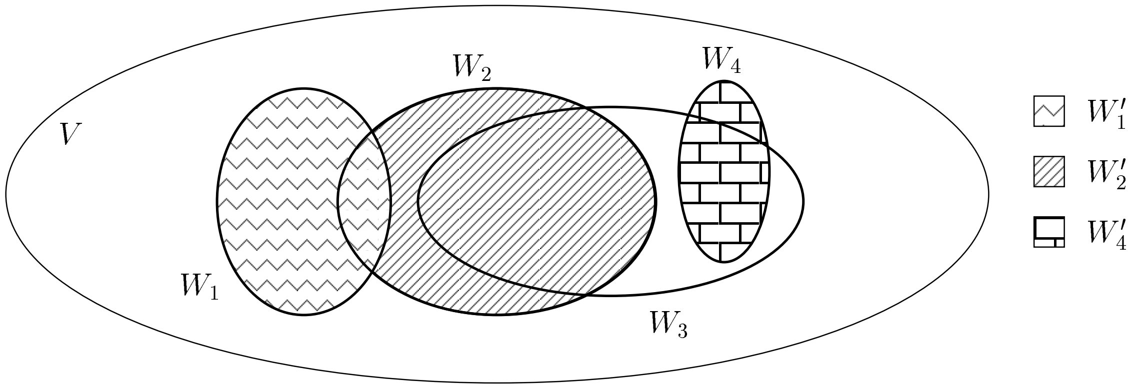

Abbildung 3.2: Illustration zum Disjunkte-Mengen-Lemma

□

Lemma 3.3. *Seien natürliche Zahlen m, n und $l \geq 3$ sowie reelles $0 < \varepsilon < 1$ gegeben. Sei H ein bipartiter Graph mit der Partition (U, W) und $|U| = |W| = n$, wobei die Partition $(s; H, \varepsilon)$-regulär für $s := \frac{lm}{(l+1)n^2}$ sei. Dann gibt es ein Matching $T \subseteq E(H)$ der Größe mindestens $(1-\varepsilon)n$.*

Beweis. Sei $U' \subseteq U$ eine Menge für die $u := |U'| - |\Gamma(U')|$ maximal ist. Nach dem Satz von Ore (Satz 1.9) genügt es zu zeigen, dass $u \leq \varepsilon n$. Falls $|\Gamma(U')| > (1-\varepsilon)n$, gilt dies offensichtlich.

Sei also $|\Gamma(U')| \leq (1-\varepsilon)n$ und außerdem $W' := W \setminus \Gamma(U')$ und damit $|W'| \geq \varepsilon n$. Ist nun $|U'| \geq \varepsilon n$ verstößt das Paar (U', W') gegen die Regularitätsbedingung, denn U' entsendet keine Kanten nach W' und somit gilt $d_{s,H}(U, W) - d_{s,H}(U', W') = \frac{l+1}{l} - 0 > \varepsilon$. Also gilt $|U'| < \varepsilon n$ und somit auch $u \leq \varepsilon n$. □

Als Zusammenfassung aus diesen beiden Lemmas lässt sich folgendes sagen: Sei für einen zufälligen bipartiten (Sub-)Graph mit Partition (V_i, V_j) das Ereignis $\mathcal{R}_{i,j}$ die Regularität wie in den Lemmas bezeichnet sowie $\mathcal{D}_{i,j}$ die Minimalgradeigenschaft wie in Lemma 3.2 und $\mathcal{M}_{i,j}$ die Matchingeigenschaft wie in Lemma 3.3, dann impliziert $\mathcal{R}_{i,j}$ sowohl $\mathcal{D}_{i,j}$ als auch $\mathcal{M}_{i,j}$.

3.2.2 Das Disjunkte-Mengen-Lemma

Das folgende Lemma sieht relativ technisch aus, besagt aber im Grunde nur, dass bei der zufälligen Wahl von Teilmengen W_i in einer Obermenge V sich mit hoher Wahrscheinlichkeit disjunkte Teilmengen W_i' dieser Mengen finden lassen, die einen beträchtlichen Teil der durch die ursprünglichen W_i überdeckten Menge abdecken.

Lemma 3.4 (Lemma 23 und Korollar 24 aus [16]). *Seien ganze Zahlen h, k und w_i für $i \in [h]$ mit $h \leq k$ und $\sum_{i=1}^{h} w_i \geq k$ sowie ein reelles $0 < \varepsilon' < 0.1$ gegeben.*

Seien V eine Menge und W_i mit $|W_i| = w_i$ Teilmengen von V, die gleichverteilt zufällig unabhängig voneinander gewählt wurden.

Dann gibt es für $h' \leq h$ und $i \in [h']$ (nach eventueller Umnummerierung der W_i) paarweise disjunkte $W_i' \subseteq W_i$ mit $|W_i'| \geq \frac{|W_i|}{2}$, so dass :

$$\mathbb{P}\left[\left|\bigcup_{i\in[h']} W_i'\right| \leq \min\left\{\frac{\varepsilon'|V|}{2}, \frac{k}{4}\right\}\right] \leq (32\mathrm{e}\varepsilon')^{\frac{k}{4}}. \tag{3.5}$$

Beweis. Unter den gewählten W_i gebe es *nützliche* nach folgender (induktiver) Definition: Für $i \geq 1$ sei J_i die Menge der j mit $j < i$ für die W_j nützlich ist und sei $u_i := \left|\bigcup_{j\in J_i} W_j\right|$.

W_i ist *nützlich*, wenn $u_i \geq \varepsilon'|V|$ oder:

$$\left|W_i \setminus \bigcup_{j\in J_i} W_j\right| \geq \frac{|W_i|}{2} \tag{3.6}$$

Die Nützlichkeit von W_i sei im folgenden mit $\mathcal{N}_i$ bezeichnet und das entsprechende Komplementärereignis mit $\bar{\mathcal{N}_i}$.

Für festes i und $u_i = u^*$ gilt bei $u^* \geq \varepsilon'|V|$

$$\mathbb{P}\left[\bar{\mathcal{N}_i}|u_i = u^*\right] = 0$$

und sonst mit der Zufallsvariable $X := \left|W_i \cap \bigcup_{j\in J_i} W_j\right|$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = |W_i|\frac{u^*}{|V|}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\bar{\mathcal{N}_i}|u_i = u^*\right] &= \mathbb{P}\left[X \geq \frac{|W_i|}{2}\right] = \mathbb{P}\left[X \geq \frac{|V|}{2u^*}\mu\right] \\
&\leq \left(\frac{\mathrm{e}}{\frac{|V|}{2u^*}}\right)^{\frac{|V|}{2u^*}\mu} && \text{Lemma 1.16} \\
&= \left(\frac{2u^*\mathrm{e}}{|V|}\right)^{\frac{w_i}{2}} \leq (2\mathrm{e}\varepsilon')^{\frac{w_i}{2}}
\end{aligned}$$

Da die W_i zufällig unabhängig voneinander gewählt wurden, hängt die Nützlichkeit eines festen W_i nicht von den konkreten anderen W_j ab, sondern lediglich vom Wert von u_i. Da aber für beliebige u_i obige Ungleichung gilt, gilt auch für beliebige Indizes $j_1, \dots, j_{h'}$:

$$\mathbb{P}\left[\bar{\mathcal{N}_i}|\bar{\mathcal{N}}_{j_1} \cap \dots \cap \bar{\mathcal{N}}_{j_{h'}}\right] \leq (2\mathrm{e}\varepsilon')^{\frac{w_i}{2}}$$

Angenommen es gibt keine Indexmenge $J \subseteq [h]$ für die alle W_i mit $i \in J$ nützlich sind und außerdem $\sum_{i\in J} w_i \geq \frac{k}{2}$. Dann müsste es eine Menge S mit $\sum_{i\in S} w_i \geq \frac{k}{2}$ geben, die nur Indizes nicht nützlicher Mengen enthält, da $\sum_i^h w_i \geq k$.

Sei nun $S \subseteq [h]$ mit $s := |S|$ eine feste Indexteilmenge mit $\sum_{i\in S} w_i \geq \frac{k}{2}$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein W_i mit $i \in S$ nützlich ist, nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, für $\mathbb{P}\left[\bar{\mathcal{N}}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{\mathcal{N}}_{i_s}\right] > 0$ gerade:

$$\mathbb{P}\left[\bar{\mathcal{N}}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{\mathcal{N}}_{i_s}\right] = \mathbb{P}\left[\bar{\mathcal{N}}_{i_1}\right]\mathbb{P}\left[\bar{\mathcal{N}}_{i_2}|\bar{\mathcal{N}}_{i_1}\right]\cdots\mathbb{P}\left[\bar{\mathcal{N}}_{i_s}|\bar{\mathcal{N}}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{\mathcal{N}}_{i_{s-1}}\right]$$

und damit gilt in jedem Fall:

$$\mathbb{P}\left[\bar{\mathcal{N}}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{\mathcal{N}}_{i_s}\right] \leq \prod_{i\in S}(2\mathrm{e}\varepsilon')^{\frac{w_i}{2}} \leq (2\mathrm{e}\varepsilon')^{\frac{k}{4}}$$

Die Existenz einer solchen Menge S ist nun beschränkt durch 2^h mal die Wahrscheinlichkeit, dass das feste S nur nicht nützliche Indizes enthält. Da die Nichtexistenz von S bedeutet, dass die Summe der Kardinalitäten der nützlichen W_i mindestens $\frac{k}{2}$ beträgt, gilt:

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i\in J_{h+1}} |W_i| \leq \frac{k}{2}\right] \leq 2^h(2\mathrm{e}\varepsilon')^{\frac{k}{4}} \leq 2^k(2\mathrm{e}\varepsilon')^{\frac{k}{4}} \leq (32\mathrm{e}\varepsilon')^{\frac{k}{4}}$$

Seien nun die U_i die nützlichen unter den W_i für die (3.6) gilt. Dann wählt man die $W_i' := U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_j$ und erhält damit disjunkte W_i', die nach der Nützlichkeitsbedingung mindestens $\frac{\varepsilon'|V|}{2}$ falls $u_{h+1} \geq \varepsilon'|V|$ und sonst mindestens $\frac{k}{4}$ Elemente in allen W_i' enthalten und erfüllt (nach der Definition von nützlich) mit diesen das Lemma. ☐

Korollar 3.5. *Sei V eine Menge, $0 < \varepsilon < 0.01$ eine reelle und h, d, y natürliche Zahlen. Wählt man h Mal gleichverteilt zufällig d Elemente aus V und vereinigt diese zu einer Menge W_1, wiederholt dieses y Mal und erhält so die Mengen $W_1, \dots, W_y$, so gilt (mit X als Anzahl der Mengen W_i für die $|W_i| < \min\left\{\varepsilon|V|, \frac{hd}{4}\right\}$):*

$$\mathbb{P}\left[X \geq \frac{y}{2}\right] \leq (64\mathrm{e}\varepsilon)^{\frac{hdy}{8}}$$

Beweis. Ein einzelnes der y obigen Experimente entspricht genau der Situation in Lemma 3.4 mit $k := hd$, $w_i := d$ für alle i und $\varepsilon' := 2\varepsilon$. Damit gilt

$$\mathbb{P}\left[|W_i| < \min\left\{\varepsilon|V|, \frac{hd}{4}\right\}\right] \leq (64\mathrm{e}\varepsilon)^{\frac{hd}{4}}$$

und, da alle y Versuche unabhängig sind, auch die Aussage des Korollars. ☐

3.2.3 Expansion

In diesem und dem nächsten Abschnitt wird mittels des Disjunkte-Mengen-Lemmas (Lemma 3.4) sowie der Regularitätseigenschaften gezeigt, dass ein Knoten in der Menge V_1 eines zufälligen dünn regulären Partitionsgraphen $G_{n,m}^{C_l}$ mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit viele Nachbarn in der Menge V_l hat.

In diesem gesamten Abschnitt sei α beliebig aber fest (wie aus der Aussage des Satzes 3.1) sowie $m, n \geq 2$ und $l \geq 3$ feste natürliche Zahlen und ε eine feste reelle Zahl mit

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{100l}, \tag{3.7}$$

$$m \geq \frac{l}{\varepsilon^3} n^{1+\frac{1}{l-1}} \geq \frac{1}{\varepsilon} n^{1+\frac{1}{l-1}} \qquad \text{sowie} \tag{3.8}$$

$$m \leq \frac{\alpha}{4l} \binom{n}{2}. \tag{3.9}$$

Außerdem seien $t_i := \left(\frac{m}{16n}\right)^i$ für alle natürlichen i, und a sei so, dass

$$\frac{8ln^3}{\varepsilon m^2} \leq t_a < \frac{8ln^3}{\varepsilon m^2}\left(\frac{m}{16n}\right) = \frac{ln^2}{2\varepsilon m}. \tag{3.10}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Nachbarschaft $i$ten Grades eines Knoten aus V_1 mit i jeweils um den Faktor $\frac{m}{16n}$ wächst, folgt aus dieser Definiton von a, dass nach a Schritten nur noch höchstens zwei zu tun sind, damit die Größe der Nachbarschaft linear in n ist. Da diese letzten beiden Schritte nicht unter Anwendung des Expansionslemmas vollzogen werden ist a sozusagen die Anzahl der Anwendungen von Lemma 3.7.

Man beachte, dass aus

$$\frac{8ln^3}{\varepsilon m^2} \overset{(3.8)}{\leq} \frac{8l\varepsilon^2 n^3}{\varepsilon n^{2(1+\frac{1}{l-1})}} = 8l\varepsilon n^{\frac{l-3}{l-1}} \overset{(3.7)}{\leq} \frac{l}{4} n^{\frac{l-3}{l-1}} \leq 2^{l-3} n^{\frac{l-3}{l-1}} \overset{(3.7)}{\leq} \left(\frac{1}{16\varepsilon}\right)^{l-3} n^{\frac{l-3}{l-1}} \overset{(3.8)}{\leq} \left(\frac{m}{16n}\right)^{l-3} \tag{3.11}$$

folgt, dass $a \leq l-3$.

Des Weiteren wird im folgenden häufiger benötigt, dass mit $x, y \geq 0$:

$$1-(1-x)(1-y) = x+y-xy \leq x+y. \tag{3.12}$$

Die Anwendung des Disjunkte-Mengen-Lemmas auf Nachbarschaften von Knoten setzt voraus, dass Nachbarschaften unabhängig voneinander gewählt werden. Dies würde voraussetzen, dass man das $G_{n,p}$-Modell verwendet, was einem die obige minimale Kantenzahl nach Lemma 1.19 nicht sichert sondern „nur“ mit hoher Wahrscheinlichkeit garantiert. Wenn im Folgenden von einem zufälligen Graph die Rede ist, ist also ein $G_{n,p}$ mit

$$p := \frac{4lm}{\alpha\binom{n}{2}}. \tag{3.13}$$

gemeint. Alle folgenden Wahrscheinlichkeiten verstehen sich als bedingt darauf, dass der betrachtete zufällige Graph mindestens m Kanten hat.

Da außerdem eine Verbindung darauf bedingt werden muss, dass der Graph die Minimalgradeigenschaft $\mathcal{D}$ nach Lemma 3.2 besitzt ist das nächste (leider recht technische) Lemma unerlässlich.

Lemma 3.6. *Sei X eine beliebige Grapheneigenschaft. Hat ein zufälliger Graph auf n Knoten mit m Kanten die Eigenschaft X mit Wahrscheinlichkeit q, so hat ein zufälliger Graph, von dem man weiss, dass er die Minimalgradeigenschaft nach Lemma 3.2 besitzt, die Eigenschaft X mit Wahrscheinlichkeit höchstens $2q$. Oder formal:*

$$\mathbb{P}[X|\mathcal{D}] \leq 2\mathbb{P}[X]$$

Beweis. Nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\mathbb{P}[X|\mathcal{D}] = \frac{\mathbb{P}[X \cap \mathcal{D}]}{\mathbb{P}[\mathcal{D}]} \leq \frac{\mathbb{P}[X]}{\mathbb{P}[\mathcal{D}]}.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\mathbb{P}[\mathcal{D}] \geq \frac{1}{2}$.

Wie im Beweis von Lemma 3.2 gesehen, folgt das Nichterfüllen der Minimalgradbedingung aus der Existenz zweier Mengen U^* mit $|U^*| \geq \varepsilon n$ und W' mit $|W'| \geq \frac{5n}{6}$, so dass jeder Knoten in U^* höchstens $\frac{4m}{5n}$ Nachbarn in W' hat. Da der Erwartungswert für die Anzahl der Nachbarn eines Knotens nach W' mindestens $p\frac{5n}{6} \geq \frac{10lm}{3\alpha n} \geq \frac{3m}{n}$ ist, gilt für die Wahrscheinlichkeit eines festen Knotens so wenige Nachbarn in einem festen W' zu haben (nach der Tschernowschen Ungleichung):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|\Gamma(x) \cap W'\right| \leq \frac{4m}{5n}\right] &\leq \mathbb{P}\left[\left|\Gamma(x) \cap W'\right| \leq \frac{4}{15}\mathbb{E}\left[\left|\Gamma(x) \cap W'\right|\right]\right] \\ &\leq \mathrm{e}^{-\frac{(1-\frac{4}{15})^2}{2}\frac{3m}{n}} \leq \mathrm{e}^{-\frac{m}{3n}}\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Mengen U^* und W' wie gefordert existieren, ist also beschränkt durch:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\exists U^*, W' \forall x \in U^* : \left|\Gamma(x) \cap W'\right| \leq \frac{4m}{5n}\right] &\leq \binom{n}{\varepsilon n}\binom{n}{\frac{5n}{6}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{m}{3n}}\right)^{\varepsilon n} \\ &\leq \left(\frac{\mathrm{e}}{\varepsilon}\right)^{\varepsilon n}\left(\frac{6\mathrm{e}}{5}\right)^{\frac{5n}{6}}\mathrm{e}^{-\frac{m\varepsilon}{3}} \leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Damit ist die Minimalgradbedingung mit Wahrscheinlichkeit größer $\frac{1}{2}$ erfüllt und das Lemma bewiesen. □

Expansion im bipartiten (Sub-)Graph

Das folgende Lemma beweist, dass in einem zufälligen bipartiten Graph mit der Minimalgradeigenschaft wie in Lemma 3.2, mit hoher Wahrscheinlichkeit zu einem beträchtlichen Anteil von gegebenen disjunkten Teilmengen der einen Partitionsmenge auch disjunkte Nachbarschaften in der anderen Partitionsmenge existieren, die nur um eine Konstante kleiner sind als der garantierte Minimalgrad multipliziert mit der Größe der Ausgangsmenge.

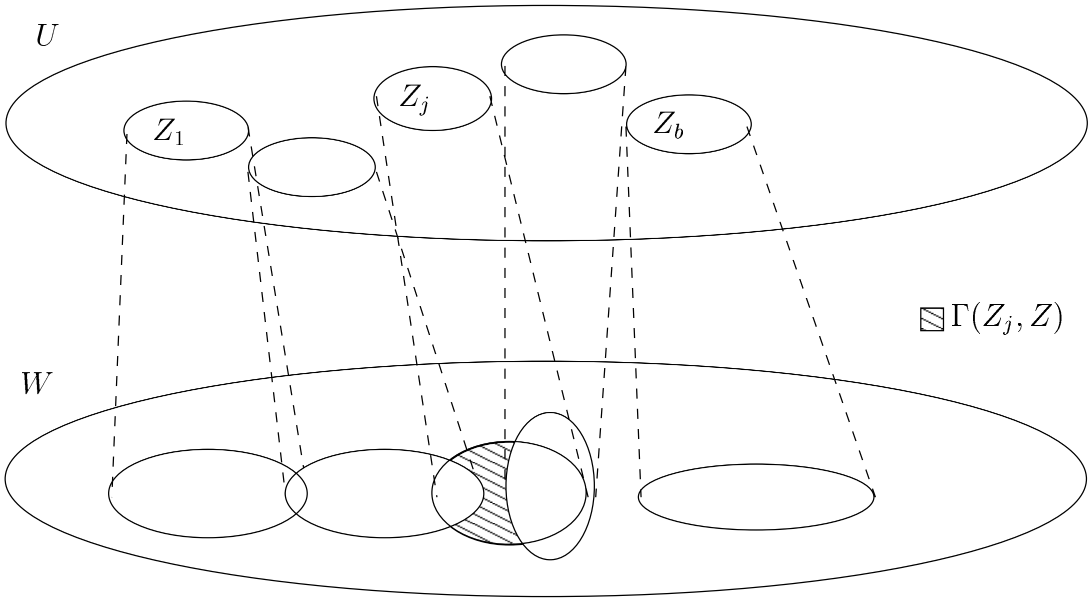

Abbildung 3.3: Illustration zur Expansion in bipartiten Graphen

Lemma 3.7. *Sei H ein zufälliger bipartiter Graph mit der Partition (U, W) und $|U| = |W| = n$. Seien außerdem $Z_1, \ldots, Z_b$ mit $t := |Z_1| = \cdots = |Z_b| \leq \frac{8ln^3}{\varepsilon m^2}$ und $b := \frac{n}{8lt}$ beliebige, paarweise disjunkte Teilmengen von U und bezeichne $\mathcal{D}$ das Ereignis, das in H die Minimalgradaussage nach Lemma 3.2 gilt.*

Dann gibt es eine Indexteilmenge $S \subseteq [b]$ mit $|S| = \frac{16n}{m}b$, so dass mit $\Gamma(Z_j, S) := \Gamma(Z_j) \setminus \Gamma\left(\bigcup_{k \in S\setminus\{j\}} Z_k\right)$:

$$\mathbb{P}\left[\exists j \in S : |\Gamma(Z_j, S)| < t\frac{m}{16n} \;\middle|\; \mathcal{D}\right] \leq (64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}. \tag{3.14}$$

Beweis. Da H Lemma 3.2 erfüllt, ist es möglich zuerst einmal alle Knoten aus U zu entfernen, die Grad weniger als $\frac{4m}{5n}$ nach W haben. Da dies höchstens εn viele sind, bleiben mindestens $y := b - \frac{5\varepsilon n}{t}$ viele Mengen Z_i übrig, in denen noch mehr als $\frac{4t}{5}$ Knoten sind. Diese stutze man auf die Größe $\frac{4t}{5}$ zurecht und nenne sie $Z'_1, \ldots, Z'_y$.

Da $Z'_1, \ldots, Z'_y$ disjunkt sind und man laut Lemma 3.6 Ergebnisse über zufällige Graphen auf Graphen, die zusätzlich die Minimalgradbedingung erfüllen, erweitern kann, ist es möglich Korollar 3.5 anzuwenden.

Dazu wählt man für alle Z'_i unabhängig voneinander jeweils t' mal (für jeden einzelnen Knoten) eine Nachbarschaftsteilmenge der Größe $\frac{4m}{5n}$ in W. Diese Minimalgröße wird durch Lemma 3.2 garantiert. Dieses Szenario entspricht genau dem in Korollar 3.5 mit $V := W, h := \frac{4t}{5}$ und $d := \frac{4m}{5n}$. Da $h \leq t \leq \frac{8ln^3}{\varepsilon m^2}$, gilt:

$$\frac{hd}{4} = \frac{hm}{5n} \leq \frac{2ln^2}{\varepsilon m} \overset{(3.8)}{\leq} \frac{2\varepsilon^2 n^2}{n^{1+\frac{1}{l-1}}} \leq 2\varepsilon^2 n \leq \varepsilon|V|.$$

Das heißt, man erhält (direkt aus Korollar 3.5) höchstens mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[X] \leq (64e\varepsilon)^{\frac{hdy}{8}} = (64e\varepsilon)^{\frac{2tym}{25n}} = (64e\varepsilon)^{\frac{(2tb-10\varepsilon n)m}{25n}} = (64e\varepsilon)^{\frac{(\frac{1}{4l}-10\varepsilon)m}{25}} \overset{(3.7)}{\leq} (64e\varepsilon)^{\frac{3}{500l}m}$$

weniger als $\frac{y}{2}$ Nachbarschaften mit mehr als $\frac{hd}{4} = \frac{t}{5}\frac{4m}{5n} \geq t\frac{m}{8n}$ Elementen. Diese Wahrscheinlichkeit ist wegen der Minimalgradbedingung laut Lemma 3.6 noch um den Faktor 2 zu korrigeren, so dass sich letztendlich eine maximale Fehlerwahrscheinlichkeit von

$$\mathbb{P}[X|\mathcal{D}] \leq 2\mathbb{P}[X] \leq 2(64e\varepsilon)^{\frac{3}{500l}m} \leq (64e\varepsilon)^{\frac{3}{1000l}m} \leq (64e\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$$

ergibt.

Der Rest des Beweises erfolgt rein deterministisch, das heißt es sind keine Zufallsexperimente mehr von Nöten.

Aus den gewählten Nachbarschaften seien $\frac{y}{2}$ viele ausgewählt, auf Größe $t\frac{m}{8n}$ zurechtgestutzt und mit $N_1, \ldots, N_{\frac{y}{2}}$ bezeichnet (o.B.d.A sei dabei $N_i \subseteq \Gamma(Z_i'))$. Es bleibt nun zu zeigen, dass sich in diesen N_i genügend viele paarweise disjunkte Mengen der Größe $t\frac{m}{16n}$ finden.

Dazu wähle man in N_1 eine beliebige Teilmenge der Größe $t\frac{m}{16n}$, entferne diese aus W und bezeichne die Verbliebenen mit W'. Da $t\frac{m}{16n} \leq \frac{ln^2}{2\varepsilon m} \overset{(3.8)}{\leq} \varepsilon n$, enthält W' noch mehr als $\frac{5n}{6}$ Knoten und man kann Lemma 3.2 anwenden, um eine Menge $U' \subseteq U$ der Größe $(1-\varepsilon)n$ zu erhalten, die nur Knoten mit Minimalgrad $\frac{4m}{5n}$ nach W' enthält.

Da die Z_i' alle disjunkt sind und alle $\frac{4t}{5}$ Knoten enthalten, enthalten nach der Entfernung von εn Knoten immer noch mindestens $y - \frac{10\varepsilon n}{3t} \overset{(3.7)}{\geq} \frac{y}{2}$ unter ihnen, mehr als $\frac{t}{2}$ Knoten in U'. Aus diesen wähle man ein Z_j' aus, das nun über mindestens $t\frac{m}{16n}$ Nachbarn in W' verfügt und entfernt diese wiederum und führt diese Prozedur insgesamt $\frac{16n}{m}b$ Mal durch. In jeder Runde werden dabei weniger Knoten in W' zur Verfügung stehen, die Z_i' in U werden jedoch in jeder Runde alle befragt, ob sie genügend Nachbarn in das neue W' haben, das heißt, es werden insbesondere die, die in der letzten Runde zu wenige Nachbarn hatten, auch jetzt wieder befragt.

Da insgesamt nur $t\frac{m}{16n}\frac{16n}{m}b = \frac{n}{8l}$ Knoten aus W entfernt werden, ist W' garantiert immer größer als $\frac{5n}{6}$, so dass die obige Argumentation gültig bleibt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass überhaupt genügend Z_i' vorhanden sind, d.h., dass $\frac{y}{2} \geq \frac{16n}{m}b$:

$$\frac{y}{2} = \frac{b}{2} - \frac{5\varepsilon n}{2t} = \frac{b}{2} - \frac{5\varepsilon n 8lb}{2n} \overset{(3.7)}{\geq} \frac{b}{2} - \frac{b}{5} \geq \frac{16\varepsilon^3}{l}b \geq \frac{16\varepsilon^3 n}{ln^{1+\frac{1}{l-1}}}b \overset{(3.8)}{\geq} \frac{16n}{m}b$$

□

Expansion im Partitionsgraph

Nachdem nun klar ist, wie sich die einzelnen Partitionspaare bezüglich der Expansion verhalten, soll diese Erkenntnis wiederholt auf den Partitionsgraphen $G_{n,m}^{C_l}$ angwandt

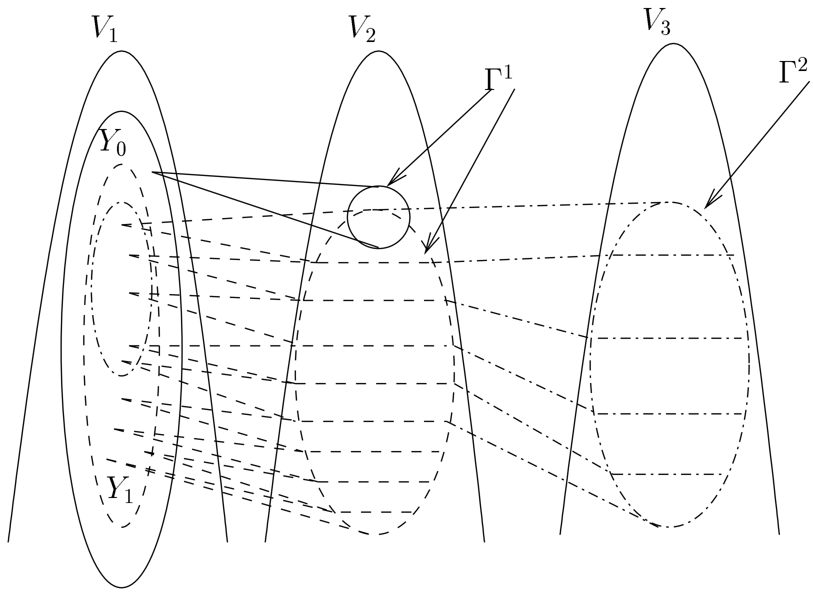

Abbildung 3.4: Illustration zur Expansion

werden. Zuvor werden jedoch noch einige abkürzende Schreibweisen für spezielle Nachbarschaften von Knoten und Knotenmengen vereinbart.

Definition 3.8. *Zu einem Partitionsgraph zu C_l mit den Partitionsklassen $V_1, \ldots, V_l$ bezeichne für einen Knoten $v \in V_k$ die Menge $\Gamma^1(v) = \Gamma(v)$ seine Nachbarn in V_{k+1} sowie entsprechend für $U \subseteq V_k$ die Menge $\Gamma^1(U) = \Gamma(U) := \bigcup_{u \in U} \Gamma(u)$ und induktiv $\Gamma^{i+1}(U) := \Gamma(\Gamma^i(U))$ und entsprechend für $\Gamma^{i+1}(v)$ die* Menge der Nachbarn $i$ten Grades.

Aus Bequemlichkeit sei $\Gamma^0(v) := \{v\}$ und $\Gamma^0(U) := U$. Des Weiteren sei $\Gamma^i(v, U) := \Gamma^i(v) \setminus \Gamma^i(U \setminus \{v\})$ die Exklusivnachbarschaft $i$ten Grades von v bezüglich U.

Das folgende Lemma zeigt nun, dass sich durch wiederholte Anwendung des gerade in Lemma 3.7 gezeigten, mit hoher Wahrscheinlichkeit zu vielen Knoten in V_1 relativ große disjunkte Nachbarschaften $(a-1)$ten Grades finden lassen.

Lemma 3.9. *Sei $G_{n,m}^{C_l}$ aus der Menge der Partitionsgraphen zu C_l gleichverteilt zufällig gewählt. Seine Partitionsklassen seien $V_1, \ldots, V_l$ und sei weiterhin $Y_0 \subseteq V_1$ beliebig mit $|Y_0| = \frac{n}{8l}$. Bezeichne $\mathcal{D}_{j,j+1}$ das Ereignis, dass der durch V_j und $V_{j+1}]$ in $G_{n,m}^{C_l}$ induzierte bipartite Subgraph die Minimalgradeigenschaft nach Lemma 3.2 hat.*

Dann gibt es für alle $0 \leq i \leq a$ eine Menge $Y_i \subseteq Y_0$ mit $y_i := |Y_i| = \frac{n}{8lt_i}$, so dass

$$\mathbb{P}\left[\exists y \in Y_i : \left|\Gamma^i(y, Y_i)\right| < t_i \;\middle|\; \bigcap_{j=1}^{i} \mathcal{D}_{j,j+1}\right] \leq i(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}. \tag{3.15}$$

Beweis. Um die Wohldefiniertheit der obigen Ausdrücke zu belegen, beachte man, dass wegen (3.11) gilt: $a \leq l$. Somit ist V_a wirklich eine der Mengen $V_1, \ldots, V_l$ ist.

Der Beweis erfolgt mittels Induktion über i. Für $i = 0$ ist die Aussage trivial, denn $\left|\Gamma^0(y, Y_0)\right| = t_0 = 1$. Zu zeigen bleibt also der Schritt von i nach $i+1$: Im folgenden wird angenommen, dass das Ereignis in (3.15) für i nicht eingetreten ist (d.h., alle folgenden Wahrscheinlichkeiten verstehen sich als bedingt darauf).

Da die Induktion nur bis a läuft, gilt also $i < a$ für das gerade betrachtete i und wegen (3.10) auch $t_i < \frac{8ln^3}{\varepsilon m^2}$. Sei $U := V_{i+1}$ und $W := V_{i+2}$ sowie $Z_y \subseteq \Gamma^i(y, Y_i)$ für alle $y \in Y_i$ gleich große, paarweise disjunkte Teilmengen von U der Größe t_i wie sie die Induktionsvoraussetzung garantiert. Durch Anwendung von Lemma 3.7 erhält man eine Menge Y_{i+1} der Größe $\frac{16n}{m} y_i = y_{i+1}$, in der alle Knoten eine exklusive Nachbarschaft von $\frac{m}{16n} t_i = t_{i+1}$ Knoten in W haben. Die Fehlerwahrscheinlichekit liegt dabei bei höchstens $(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$.

Da wir auf die Induktionsvoraussetzung bedingt hatten, ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir nicht bis hierher kommen, beschränkt durch:

$$1 - \left(1 - (64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}\right)\left(1 - i(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}\right) \overset{(3.12)}{\leq} (i+1)(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$$

□

Korollar 3.10. *Seien G, V_i, Y_i und y_i wie in Lemma 3.9, wobei auch $G[V_{a+1}, V_{a+2}]$ die Minimalgradeigenschaft nach Lemma 3.2 erfülle.*

Dann gibt es eine Menge $Y^* \subseteq Y_a \subseteq Y_0$ mit $|Y^*| = \frac{y_a}{4} = \frac{n}{32lt_a}$, so dass:

$$\mathbb{P}\left[\exists y \in Y^* : \left|\Gamma^{a+1}(y)\right| < \min\left\{\varepsilon n, t_a \frac{m}{8n}\right\} \;\middle|\; \bigcap_{j=1}^{a+1} \mathcal{D}_{j,j+1}\right] \leq (a+1)(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}.$$

Beweis. Aus Lemma 3.9 ist bekannt, dass mit Wahrscheinlichkeit $a(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$ jeder Knoten in Y_a eine Exklusivnachbarschaft $a$ten Grades der Größe t_a in V_{a+1} hat.

Analog zum Beweis von Lemma 3.7 ist es nun möglich, zuerst einmal alle Knoten aus V_{a+1} zu entfernen, die Grad weniger als $\frac{4m}{5n}$ nach V_{a+2} haben. Da dies höchstens εn viele sind, bleiben mindestens $y := y_a - \frac{5\varepsilon n}{t}$ viele Nachbarschaftsengen Z_i übrig, in denen mehr als $\frac{4t}{5}$ Knoten den Grad $\frac{4m}{5n}$ nach W haben. Diese stutze man auf die Größe $\frac{4t}{5}$ zurecht und nenne sie $Z'_1, \ldots, Z'_y$. Mit der gleichen Rechnung wie im Beweis von Lemma 3.7, wobei jetzt nicht mehr zwingend $\frac{hd}{4} \leq \varepsilon n$ gilt, erhält man höchstens mit Wahrscheinlichkeit $(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$ weniger als $\frac{y}{2} \geq \frac{y_a}{4}$ Nachbarschaften mit mehr als $\min\left\{\varepsilon n, t_a \frac{m}{8n}\right\}$ Elementen.

Es bleibt nur, die Fehlerwahrscheinlichkeit zu zeigen:

$$\mathbb{P}\left[\exists y \in Y^* : \left|\Gamma^{a+1}(y)\right| < \min\left\{\varepsilon n, t_a \frac{m}{8n}\right\} \;\middle|\; \bigcap_{j=1}^{a+1} \mathcal{D}_{j,j+1}\right]$$
$$\leq 1 - \left(1 - a(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}\right) \cdot \left(1 - (64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}\right) \overset{(3.12)}{\leq} (a+1)(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$$

□

3.2.4 Der letzte Expansionschritt

Da das Disjunkte-Mengen-Lemma (Lemma 3.4) leider nur bis zu einer Größe von εn angewandt werden kann, hier jedoch eine Expansion auf $(1-\varepsilon)n$ Knoten benötigt wird, muss der letzte Schritt mit Hilfe des folgenden Lemmas vollzogen werden.

Lemma 3.11 (Lemma 8.31 aus [8]). *Seien natürliche Zahlen $n, m, l \geq 3$ und t sowie reelles $0 < \varepsilon < \frac{1}{5l}$ so gegeben, dass $\frac{ln^2}{\varepsilon m} \leq t \leq \varepsilon n$. Sei H ein bipartiter Graph mit Bipartition $(U, W), |U| = |W| = n$ und $e_H = m$ dessen Bipartition $(s; H, \varepsilon)$-regulär mit $s := \frac{lm}{(l+1)n^2}$ ist. Sei weiterhin T mit $|T| = t$ eine zufällige Teilmenge von U. Dann gilt:*

$$\mathbb{P}\left[|\Gamma(T)| < (1-\varepsilon)n\right] \leq (5\varepsilon)^{\frac{t}{2}}. \tag{3.16}$$

Beweis. Man generiere T sequentiell, indem man die Knoten $x_1, \ldots, x_t$ zufällig aus den verbliebenen Knoten von U wähle. Für $i \in [t]$ sei $T_i := \{x_1, \ldots, x_i\}$ und $T_0 = \emptyset$ sowie $W_i := W \setminus \Gamma(T_i)$ die Menge der nicht zu T_i adjazenten Knoten aus W. Sei weiterhin B_i die Menge der Knoten in $U \setminus T_i$ mit weniger als $s|W_i|$ Nachbarn in W_i.

Angenommen $|W_t| > \varepsilon n$, was genau dem Ereignis in (3.16) entspricht, und damit $|W_i| > \varepsilon n$ für alle $i \leq t$. Dann muss $|B_i| < \varepsilon n$ für alle $i \leq t$, da nach der Definition von B_i die skalierte Paardichte

$$d_{s,H}(B_i, W_i) = \frac{e_H(B_i, W_i)}{s|B_i||W_i|} < \frac{|B_i|s|W_i|}{s|B_i||W_i|} = 1,$$

während nach (3.3) gilt: $d_{s,H}(U, W) \geq \frac{l+1}{l} > 1 + \varepsilon$, was ein Widerspruch zur $(s; H, \varepsilon)$-Regularität wäre. Damit gilt für $i \leq t - 1$:

$$\mathbb{P}\left[x_{i+1} \in B_i\right] = \frac{|B_i|}{n-i} < \frac{\varepsilon n}{n-t} \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq \frac{5\varepsilon}{4}.$$

Jetzt zähle man noch, wie oft man überhaupt x_{i+1} außerhalb B_i wählen kann. Da sich mit jeder Wahl von x_{i+1} außerhalb B_i die Größe von W_i um mindestens $s|W_i| > s\varepsilon n$ verringert, gilt also in diesem Fall $|W_i| - |W_{i+1}| > s\varepsilon n$. Damit kann man aber x_{i+1} höchstens $\frac{t}{2}$-mal außerhalb B_i wählen, da sonst

$$|W_t| - |W_0| > \frac{t}{2} s\varepsilon n = \frac{t}{2} \frac{l\varepsilon m}{(l+1)n} \geq \frac{ln^2}{\varepsilon m} \frac{l\varepsilon m}{2(l+1)n} > n.$$

Damit gilt aber

$$\mathbb{P}\left[\text{Es gilt mindestens } \frac{t}{2}\text{-mal: } x_{i+1} \in B_i\right] \le \binom{t}{\frac{t}{2}} \left(\frac{5\varepsilon}{4}\right)^{\frac{t}{2}} \le 2^t \left(\frac{5\varepsilon}{4}\right)^{\frac{t}{2}} = (5\varepsilon)^{\frac{t}{2}}.$$

Also gilt auch $\mathbb{P}\left[|W_t| > \varepsilon n\right] \le (5\varepsilon)^{\frac{t}{2}}$ und somit die Aussage des Lemmas. □

Lemma 3.12. *Seien $\varepsilon, G, l, n, m, V_i, a, Y_i$ wie in Lemma 3.9 und $Y^* \subseteq Y_a \subseteq Y_0$ wie in Korollar 3.10. Sei außerdem $H := G[V_{a+2}, V_{a+3}]$ (der bipartite Graph, der durch V_{a+2} und V_{a+3} in G induziert wird) $(\rho_G; H, \varepsilon)$-regulär. Dann gibt es eine nicht leere Menge $Y' \subseteq Y^* \subseteq Y_0$, so dass:*

$$\mathbb{P}\left[\exists y \in Y' : \left|\Gamma^{a+2}(y)\right| < (1-\varepsilon)n\right] \le (a+2)(64e\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}.$$

Beweis. Da (V_{a+2}, V_{a+3}) $(\rho_G; H, \varepsilon)$-regulär ist, ist es nach Korollar 2.3 und (3.2) auch $(s; H, \varepsilon)$-regulär mit $s := \frac{lm}{(l+1)n^2}$. Da $G[V_{a+1}, V_{a+2}]$ ein zufälliger Graph ist, der die Minimalgradbedingung nach Lemma 3.2 erfüllt, kann man davon ausgehen, dass die interessierenden Nachbarschaftsteilmengen $(a+1)$ten Grades der Knoten aus Y^* unabhängig voneinander zufällig gewählt worden sind, denn die zugehörigen Nachbarschaftsteilmengen $a$ten Grades waren ja disjunkt. Da die Minimalgradbedingung erfüllt ist, muss jedoch nach Lemma 3.6 jede Wahrscheinlichkeitsschranke, die von völlig zufällig gewählten Mengen ausgeht, um den Faktor zwei korrigiert werden.

Weiterhin ist aus Korollar 3.10 bekannt, dass die interessierenden Nachbarschaftsteilmengen $(a+1)$ten Grades mit Wahrscheinlichkeit $1-(a+1)(64e\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$ mindestens $t := \min\left\{\varepsilon n, t_a \frac{m}{8n}\right\}$ Knoten enthalten.

Nach dem Wert von t ist nun eine Fallunterscheidung nötig:

1. $t = \varepsilon n$

   Aus der ε-Regularität des Graphen H folgt unmittelbar (und deterministisch), dass für alle $y \in Y^*$ die Menge $T := \Gamma^{a+1}(y)$ mindestens $(1-\varepsilon)n$ Nachbarn in V_{a+3} hat denn sonst wäre zwischen T und der Menge der „Nichtnachbarn“ die skalierte Dichte 0 und somit die Regularitätsbedinugung nicht erfüllt.

2. $t = t_a \frac{m}{8n}$

   Nach Ungleichung (3.10) gilt damit $t \ge \frac{ln^2}{\varepsilon m}$. Somit lässt sich für alle $y \in Y^*$ Lemma 3.11 mit $T := \Gamma^{a+1}(y)$ anwenden. Da diese Mengen unabhängig voneinander gewählt worden sind (denn es sind Nachbarschaften disjunkter Knotenmengen eines zufälligen Graphen), ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als $\frac{|Y^*|}{2}$ mal eine Nachbarschaft von $(1-\varepsilon)n$ Knoten in V_{a+3} erreicht wurde, beschränkt durch:

   $$\mathbb{P}\left[X|\mathcal{D}\right] \le 2(5\varepsilon)^{\frac{t}{2}\frac{|Y^*|}{2}} = 2(5\varepsilon)^{t\frac{n}{128lt_a}} = 2(5\varepsilon)^{\frac{t_a mn}{1024nlt_a}} \le (5\varepsilon)^{l^{-1}2^{-11}m} \le (64e\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$$

   Damit gilt die Aussage im Korollar höchstens mit Wahrscheinlichkeit

   $$1 - \left(1 - (64e\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}\right)\left(1-(a+1)(64e\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}\right) \overset{(3.12)}{\le} (a+2)(64e\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$$

□

3.3 Der Beweis

Nachdem nun alle vorbereitenden Lemmas gezeigt sind, kann der eigentliche Satz bewiesen werden. Dabei wird im Wesentlichen das letzte Lemma (Lemma 3.12) ausgenutzt werden, um die Expansion von einzelnen Knoten zu zeigen und anschließend die Wahrscheinlichkeit abgeschätzt, dass keiner der expandierenden Knoten einen Kreis schließt.

Beweis von Satz 3.1. Da für $\alpha \geq 1$ die Aussage trivial ist, wird im folgenden $\alpha < 1$ angenommen.

Sei $G := G_{n,m}^{C_l}$ ein zufällig gewählter Partitionsgraph mit Partition $V_1, \ldots, V_l$. Mit „zufällig“ ist hier wieder gemeint, dass jedes Partitionspaar ein zufälliger bipartiter Graph des binomialen Modells, mit Kantenwahrscheinlichkeit p entsprechend (3.13) gewählt, ist, womit die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Graph weniger als m Kanten hat, nach Lemma 1.19 kleiner ist als $\left(\frac{\alpha}{l}\right)^{2m}$.

Weiterhin seien das Ereignis $\mathcal{R}_{i,j}$ die $(\rho_G; G, \varepsilon)$-Regularität des Paares (V_i, V_j), das Ereignis $\mathcal{D}_{i,j}$ die Minimalgradeigenschaft wie in Lemma 3.2, $\mathcal{M}_{i,j}$ die Matchingeigenschaft wie in Lemma 3.3 und $\mathcal{C}$ das Ereignis, dass G C_l-frei ist.

Mit dieser Formalisierung lässt sich die Aussage des Satzes so umformulieren:

$$\mathbb{P}[\mathcal{A}] := \mathbb{P}\left[\mathcal{C} \cap \bigcap_{i=1}^{l-1} \mathcal{R}_{i,i+1} \cap \mathcal{R}_{1,l}\right] \leq \alpha^m.$$

Im folgenden wird gezeigt:

$$\mathbb{P}\left[\mathcal{C} \;\middle|\; \bigcap_{i=1}^{a+1} \mathcal{D}_{i,i+1} \cap \mathcal{R}_{a+2,a+3} \cap \bigcap_{i=a+3}^{l-1} \mathcal{M}_{i,i+1} \cap \mathcal{D}_{1,l}\right] \leq \alpha^m$$

und damit der Satz bewiesen, denn da nach Lemma 3.2 das Ereignis $\mathcal{R}_{i,j}$ das Ereignis $\mathcal{D}_{i,j}$ und ebenso nach Lemma 3.3 $\mathcal{R}_{i,j}$ das Ereignis $\mathcal{M}_{i,j}$ impliziert, gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\mathcal{A}] &= \mathbb{P}\left[\mathcal{C} \cap \bigcap_{i=1}^{l-1} \mathcal{R}_{i,i+1} \cap \mathcal{R}_{1,l}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\mathcal{C} \cap \bigcap_{i=1}^{a+1} \mathcal{R}_{i,i+1} \cap \mathcal{R}_{a+2,a+3} \cap \bigcap_{i=a+3}^{l-1} \mathcal{R}_{i,i+1} \cap \mathcal{R}_{1,l}\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[\mathcal{C} \cap \bigcap_{i=1}^{a+1} \mathcal{D}_{i,i+1} \cap \mathcal{R}_{a+2,a+3} \cap \bigcap_{i=a+3}^{l-1} \mathcal{M}_{i,i+1} \cap \mathcal{D}_{1,l}\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[\mathcal{C} \;\middle|\; \bigcap_{i=1}^{a+1} \mathcal{D}_{i,i+1} \cap \mathcal{R}_{a+2,a+3} \cap \bigcap_{i=a+3}^{l-1} \mathcal{M}_{i,i+1} \cap \mathcal{D}_{1,l}\right]
\end{aligned}$$

Seien also im Folgenden $\varepsilon, G, l, n, m, V_i, a$ und Y' wie in Lemma 3.12.

Ein Knoten aus V_1 mit mindestens $(1-\delta)n$ Nachbarn $(k-1)$ten Grades in V_k heiße (k,δ)*-expandierend*. Eine Menge von Knoten aus V_1 heiße (k,δ)*-expandierend*, wenn jeder Knoten in ihr (k,δ)-expandierend ist.

Als erstes zeigt man indirekt, dass es mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit eine $(a+3,\varepsilon)$-expandierende Menge der Größe $\frac{7n}{8}$ in V_1 gibt. Also angenommen, es gibt solch eine Menge nicht. Dann muss jede Menge der Größe $\frac{7n}{8}$ in V_1 einen nicht $(a+3,\varepsilon)$-expandierenden Knoten enthalten. Daraus folgt, dass es eine Menge der Größe $\frac{n}{8}$ in V_1 gibt, die keine $(a+3,\varepsilon)$-expandierenden Knoten enthält.

Dabei ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Menge existiert, beschränkt durch $\binom{n}{\frac{n}{8}}$ mal die Wahrscheinlichkeit, dass eine feste Menge $Y \subset V_1$ der Größe $\frac{n}{8}$ keinen $(a+3,\varepsilon)$-expandierenden Knoten enthält. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich nach Lemma 3.12 beschränken durch $(a+2)(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$, denn die dort ermittelte Menge Y' ist Teilmenge der in Lemma 3.9 beliebig gewählten Menge Y_0 der Größe $|Y_0| = \frac{n}{8l}$, ist nicht leer und enthält nur $(a+3,\varepsilon)$-expandierende Knoten. Damit existiert eine beliebige Menge der Größe $\frac{n}{8}$ ohne $(a+3,\varepsilon)$-expandierende Knoten mit Wahrscheinlichkeit höchstens

$$\binom{n}{\frac{n}{8}}(a+2)(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m} \leq 2^n(a+2)(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$$

Damit ist also die Existenz einer $(a+3,\varepsilon)$-expandierenden Menge der Größe $\frac{7n}{8}$ in V_1 hoch wahrscheinlich. Diese Menge heiße Z.

Wie Ungleichung (3.11) erweist, gilt $a \leq l-3$. Ist nun $a \leq l-4$, genügt einem die $(a+3,\varepsilon)$-expandierende Menge leider nicht, da man gerne eine Menge hätte, die nach V_l expandiert, um dann von V_1 nach V_l den Kreis zu schließen.

Allerdings gibt es nach Lemma 3.3 zwischen allen V_j und V_{j+1} jeweils ein Matching der Größe mindestens $(1-\varepsilon)n$. Damit ist also ein Knoten, der (j,ε)-expandierend ist, auch mindestens $(j+1,2\varepsilon)$-expandierend und somit die Menge Z auf jeden Fall $(l,l\varepsilon)$-expandierend.

Somit ist gezeigt, dass mit Wahrscheinlichkeit höchstens

$$2^n(a+2)(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m} \leq 2^n l(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$$

eine Menge Z in V_1 existiert, die mindestens $\frac{7n}{8}$ Knoten enthält, von denen alle mindestens $(1-l\varepsilon)n$ Nachbarn $(l-1)$ten Grades in V_l haben.

Jetzt wähle man für alle Knoten in Z, die mindestens $\frac{m}{2n}$ direkte Nachbarn in V_l haben, eben diese Nachbarschaft. Damit dabei kein Kreis geschlossen wird, müssen diese Nachbarn jeweils alle in einer Menge der Größe $l\varepsilon n$ Platz finden. Da Lemma 3.2 impliziert, dass Z mindestens $\frac{7n}{8} - \varepsilon n$ solcher Knoten hohen Grades enthält, läßt sich die Wahrscheinlichkeit, dass kein Kreis zu Stande kommt, abschätzen durch:

$$\left((l\varepsilon)^{\frac{m}{2n}}\right)^{\frac{7n}{8}-\varepsilon n} \leq (l\varepsilon)^{\frac{m}{4}} \overset{(3.7)}{\leq} \varepsilon^{\frac{m}{4l}} \leq (64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m}$$

Für das Ereignis, dass G unter den gegebenen Bedingungen keinen Kreis enthält, gilt also:

$$\mathbb{P}[\mathcal{A}] \leq (2^n l + 1)(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}m} \overset{(3.8)}{\leq} \left(2(64\mathrm{e}\varepsilon)^{l^{-1}2^{-9}}\right)^m$$

Setzt man nun $\varepsilon := \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{l2^9}}{64\mathrm{e}}$ und $c := \frac{l}{\varepsilon^3}$ so erfüllt man wegen $\alpha < 1$ und $l \geq 3$ sicher die verschiedenen vorausgesetzten Schranken an ε (insbsondere (3.7)) und natürlich auch die Schranke (3.8), die für m vorausgesetzt wurde und erhält $\mathbb{P}[\mathcal{A}] \leq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^m$.

Da darauf bedingt wurde, dass alle Partitionsklassen paarweise durch mindestens m Kanten verbunden sind, was wegen (3.13) und Lemma 1.19 „nur“ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{\alpha}{l}\right)^{2m}$ der Fall ist, gilt ist die Wahrscheinlichkeit der Satzaussage beschränkt durch:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^m + l\left(\frac{\alpha}{l}\right)^{2m} \leq \alpha^m.$$

□

4 Zusammenfassung und Ausblick

4.1 Die Ergebnisse

Im Folgenden wird nochmals kurz zusammengefasst, welche Sätze durch diese Arbeit erstmals bewiesen wurden, indem die Vermutung 2.5 für Kreise gezeigt und somit einige Vermutungen validiert wurden und wofür neue (eventuell kürzere) Beweise gefunden wurden.

Aus dem Bereich der Ramseytheorie zufälliger Graphen ist der Beweis der 1-Aussage des zentralen Schwellenwertsatzes (Satz 2.15) erheblich kürzer, wenn die Vermutung verwendet wird, allerdings ist der Beweis auch ohne die Vermutung vollständig möglich.

In der extremalen Graphentheorie wurde die Vermutung 2.16 für Kreise bereits durch Kreuter [12] unter Verwendung einer schwächeren Version der Vermutung gezeigt, jedoch ist dort kein Beweis zu Vermutung 2.18 zu finden.

Als erstmalig bewiesen dürfen die Sätze aus dem Abschnitt 2.5 in Bezug auf Kreise gelten, die durch die Vorarbeit von Łuczak [13] nur bedingt auf die Gültigkeit der Vermutung 2.5 bewiesen waren.

4.2 Mögliche Erweiterungen des Beweises

Die grundlegende Idee zur weiteren Ausnutzung der Beweisidee besteht darin, die Expansion nicht nur entlang eines Pfades, sondern mehrerer disjunkter Pfade oder sogar entlang eines Baumes zu verfolgen. Die einfachste denkbare Verallgemeinerung besteht jedoch in der Ausweitung auf die Klasse der Graphen, die höchstens einen Kreis besitzen.

Korollar 4.1. *Sei H ein Graph mit höchstens einem Kreis. Dann gibt es für jedes $\alpha > 0$ Konstanten $\varepsilon = \varepsilon(H, \alpha)$ und $c = c(H, \alpha)$, so dass für $m \geq cn^{2-\frac{1}{m_2(H)}}$ gilt:*

$$\mathbb{P}\left[G^H_{n,m} \text{ enthält keine Kopie von } H \,\cap\, G^H_{n,m} \text{ ist dünn } \varepsilon\text{-regulär}\right] \leq \alpha^m.$$

Beweisskizze. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei H zusammenhängend (sonst betrachte man die Komponenten von H einzeln). Es gibt zwei Fälle zu unterscheiden:

1. H enthält keinen Kreis (ist ein Baum).

   Nach Lemma 3.3 existiert zwischen zwei Partitionsklassen im dünn ε-regulären Partitionsgraph immer ein Matching der Größe $(1-\varepsilon)n$. Durch einfache Induktion folgt daraus, dass ein Partitionsgraph zu einem Baum T auf k Knoten in jeder Partitionsklasse $(1-k\varepsilon)n$ Knoten enthält, die in Kopien von T liegen. Mit $\varepsilon < \frac{1}{v_H}$ folgt die Aussage des Korollars sogar mit Sicherheit.

2. H enthält einen Kreis.

   Man beachte, dass $m_2(H) = \frac{l-1}{l-2}$ ist, wobei l die Länge des Kreises bezeichne. Der Beweis verläuft genauso wie für den einfachen Kreis, man beachte lediglich, dass an den Knoten x des Kreises, die mehr als zwei Nachbarn haben, die zugehörige Menge $\bar{V}_x$ nicht mehr nur aus der nach Lemma 3.2 existierenden mit Minimalgradgarantie in eine Nachfolgerklasse bestehen muss, sondern aus dem Schnitt all dieser bezüglich aller Nachfolger. Da die Anzahl der Nachfolgeklassen durch v_H beschränkt ist, stellt dies für ε klein genug keine wesentliche Einschränkung dar.

   Der weitere Beweis garantiert dann einen Kreis mit Nachbarn in allen nicht zum Kreis gehörenden Partitionsklassen, die sich durch weitere Ausnutzung der Minimalgradeigenschaft leicht auf deren Nachbarn usw. ausdehnen lassen, bis schließlich der ganze Graph H enthalten ist.

$\square$

Eine zusätzliche Erweiterung ergibt sich, wenn man Graphen betrachtet, die in einem anderen Sinne nur einen Kreis besitzen. Denn stellt man sich Graphen vor, die durch das sukzessive Zusammenkleben von Kreisen an ein- und derselben Kante entstehen, erhält man eine weitere Graphenklasse, die durch den Beweis abdeckbar ist. Alternativ zu dieser konstruktiven Vorstellung kann man auch sagen, dass es in diesen Graphen zwei verbundene Knoten gibt, die in jedem Kreis sind, bzw. eine Kante, die jeder Kreis schneidet.

Vor der Formulierung der Verallgemeinerung braucht man noch den Graphenparameter des kürzesten Kreises:

Definition 4.2. *Zu einem zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit mindestens einem Kreis bezeichnet $g(G)$ die Länge eines kürzesten Kreises in G (seine* Taillenweite*).*

Korollar 4.3. *Sei H ein zusammenhängender Graph, in dem alle Kreise eine feste Kante $\{x, y\}$ schneiden. Dann gibt es für jedes $\alpha > 0$ Konstanten $\varepsilon = \varepsilon(H, \alpha)$ und $c = c(H, \alpha)$, so dass für $m \geq cn^{2-\frac{1}{m_2(H)}} = cn^{1+\frac{1}{g(H)+1}}$ gilt:*

$$\mathbb{P}\left[G^H_{n,m} \text{ enthält keine Kopie von } H \cap G^H_{n,m} \text{ ist dünn } \varepsilon\text{-regulär}\right] \leq \alpha^m.$$

Beweisskizze. Sei $v := v(H)$ und $e := e(H)$. Weiterhin bezeichne zu einem Knoten $x \in V(H)$ die Menge V_x die zugehörige Partitionsklasse in $G^H_{n,m}$.

Da alle Kreise die Knoten x und y enthalten, tut es auch der kürzeste unter ihnen. Offenbar enthält er auch die Kante (x, y), da sich sonst ein kürzerer Kreis finden ließe.

Somit ist es möglich, in dem zu H gehörenden Partitionsgraph, die Expansion wie im Beweis von Satz 3.1 von V_x aus durchzuführen und eine Nachbarschaft der Größe

$(1 - v\varepsilon)n$ auf Wegen über alle Kreise in V_y zu erreichen. Der Schnitt aller dieser Expansionsmengen hat nun immer noch Größe $(1 - v^2\varepsilon)n$, und läßt bei geeignet kleinem ε das Schließen aller Kreise über die Kante (x, y) zu.

Es bleibt zu zeigen, dass die m_2-Dichte eines jeden solchen Graphen wirklich wie oben durch die Länge seines kürzesten Kreises gegeben ist, was jedoch durch den induktiven Aufbau eines solchen Graphen leicht geschehen kann. $\square$

Etwas schwieriger ist es, den Beweis auf allgemeine Graphen auszudehnen, da dort mindestens zweimal der kritische „Lückenschluss" erfolgen muss, ohne dabei allzu viele Knoten in den einzelnen Partitionsklassen zu verlieren (d.h., nicht mehr mit ausreichend hoher Wahrscheinlichkeit garantieren zu können, dass sie sich in einer Kopie des bisher erreichten Teilgraphs von H befinden).

Hier zeigt aber auch schon der erwartete Schwellenwert bei einfachen Beispielen, dass der Beweis erheblich komplizierter werden wird, da die Länge der kürzesten Kreise für die m_2-Dichte des Graphen keine Rolle mehr spielt. So ist etwa die m_2-Dichte des K_4

$$m_2(K_4) = \frac{5}{2} > m_2(C_3) = 2$$

und die des $K_{2,3}$:

$$m_2(K_{2,3}) = \frac{5}{3} > m_2(C_4) = \frac{3}{2}.$$

Im Falle des K_4 ist der Beweis mittels anderer Methoden vor Kurzem durch Gerke, Prömel, Schickinger, Steger und Taraz [6] erfolgt, der $K_{2,n}$ wird von Janson, Łuczak und Ruciński (siehe [8]) als etwas einfacher erachtet, ist aber trotzdem noch ungelöst.

Literaturverzeichnis

[1] B. Bollobás. *Extremal Graph Theory.* Academic Press, 1978.

[2] B. Bollobás. *Random Graphs.* Cambridge University Press, 2nd edition, 2001.

[3] B. Bollobás and A. Thomason. Threshold functions. *Combinatorica*, (7):4, 1986.

[4] R. Diestel. *Graph theory.* Springer, New York, 1997.

[5] P. Erdős and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, 5:17–61, 1960.

[6] S. Gerke, H. J. Prömel, T. Schickinger, A. Steger, and A. Taraz. K_4-free subgraphs of random graphs revisited. Preprint, 2002.

[7] R. Graham, B. Rothschild, and J. Spencer. *Ramsey Theory.* Wiley, New York, 1980.

[8] S. Janson, A. Ruciński, and T. Łuczak. *Random Graphs.* John Wiley & Sons, 2000.

[9] Y. Kohayakawa. Szemerédi's regularity lemma. In *Foundations of computational mathematics. Selected papers of a conference, held at IMPA in Rio de Janeiro, Brazil, January 1997*, pages 216–230. Springer-Verlag Berlin, 1997.

[10] Y. Kohayakawa, T. Łuczak, and V. Rödl. On K^4-free subgraphs of random graphs. *Combinatorica*, 17(2):173–213, 1997.

[11] Y. Kohayakawa and V. Rödl. Regular pairs in sparse random graphs I. 2001.

[12] B. Kreuter. *Probabilistic versions of Ramsey's and Turàn's theorems.* PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Dezember 1997.

[13] T. Łuczak. On triangle-free random graphs. *Random Structures and Algorithms*, 16:260–276, 2000.

[14] T. Łuczak, A. Ruciński, and B. Voigt. Ramsey properties of random graphs. *Journal of Combinatorial Theory (B)*, (56):55–68, 1992.

[15] D. Osthus. *On the Evolution of Random Discrete Structures.* PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, 2000.

[16] D. Osthus, H. J. Prömel, and A. Taraz. For which densities are random triangle-gree graphs almost surely bipartite? to appear in: Combinatorica, 2001.

[17] F. P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 30:264–286, 1930.

[18] V. Rödl and A. Ruciński. Lower bounds on probability thresholds for Ramsey properties. In D. Miklós, V. T. Sós, and T. Szőnyi, editors, *Combinatorics—Paul Erdős is eighty,* vol. 1, Bolyai Society Mathematical Studies, pages 317–346. János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1993.

[19] V. Rödl and A. Ruciński. Threshold functions for Ramsey properties. *Journal of the AMS*, 8(4), October 1995.

[20] M. Simonovits. Extremal graph theory. In *Selected Topics in Graph Theory 2*, chapter 6, pages 161–200. 1983.

[21] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arithmetica*, 27:199–245, 1975.

[22] P. Turán. On the theory of graphs. In P. Erdős, editor, *Collected Papers of Paul Turán, Vol. I*, pages 718–729. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1990.